

II курс, II семестр

Кружков Леонид
Владимирович

Матан

Глава I Теория числовых рядов

§1 Сложение числового ряда и его сходимость

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — посыл. действ. чисел.

сложимы числа: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ формальная сумма

$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \text{числовой ряд (1)}$$

$\{u_n\} \leftarrow$ члены ряда

$\forall$ каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим сумму первых n слагаемых

$$S_n = u_1 + \dots + u_n \quad (\forall n) - n\text{-ая частичная}$$

По определ. ряд (1) сходится (к числу S) (своей сумме) S если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и S_n имеет предел $(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n)$

$$(1) \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

опред $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |S_n - S| < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$$\xrightarrow[\text{остаток ряда}]{\text{остаток ряда}} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = r_n$$

(1)

Пример 1 $q \neq 0$: $u_n = q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$
 $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \rightarrow ?$ $S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1 \\ n, q=1 \end{cases}$
 (может начинаться с любого числа)

$|q| = 1$: ряд расходится

$|q| > 1$: q^{n-1} не имеет предела, ряд расходится

$|q| < 1$: $q^{n-1} \rightarrow 0$

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ - ряд сходится

Пример 2 $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $(= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$S_n = u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ - ряд сходится

Пример 3:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Ф-ла Маклорена

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$
 $\theta = \theta(x, n)$
 $\theta \in (0, 1)$

Лагранж

$S_n = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

Докажем: $S_n \rightarrow e^x - 1$

оцениваем

~~оцениваем~~

$|S_n - S| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} =$
 $= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = (*)$

Если $x > 0$, то $\theta x < x \Rightarrow e^{\theta x} < e^x$
 Если $x \leq 0$, то $e^{\theta x} \leq 1 \leq e^{-x} \Rightarrow e^{\theta x} < e^{|x|}$

$(*) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \text{ const}$
 д.м.б.

снизу ≥ 0 , сверху по д.м. $\Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S| = 0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 \quad \left| \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \right. \quad (0! \stackrel{\text{def}}{=} 1)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Базис)

Теорема 1

Критерий Коши

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

То есть S_n имеет предел (крит. Коши)
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N}$
 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon (=)$

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$

(2)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ сходится}$$

В силу т. 1 из сходимости ряда $\rightarrow (p=1)$

$\exists n \in \mathbb{N} : n \leq n \wedge n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Следствие 1 Это необходимое условие сходимости. Если ряд сход., то его член $\rightarrow 0$. Обратное неверно, то не дост. условие.

Пример 4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - расходящийся гармонический ряд

По критерию Коши (2) расходится $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N, \exists (p \in M)$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \geq \varepsilon$$

Step-6: $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \geq (F_m \in \mathbb{N})$

$$\geq \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=N+1}^{N+N} u_k = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Задача 1. Отражение любого конечного класса элементов ряда не влияет на сходимость (на сумму влияет)

$u_1, u_2, \dots, u_n$ — вырабатываемые
происходят до него.

S и $n \geq N$ уменьшает на
постоянную величину (const)

Зам 2 ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (cu_k)$, $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ сходятся и расходятся одновременно по крив. Коэф. константа (выносятся)

§ 2 Ряды с неотрицательными членами

$p_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ - рассмотрим.

$$S_n = p_1 + \dots + p_n \leq S_{n+1} = p_1 + \dots + p_n + p_{n+1} = S_n + \underbrace{(p_{n+1})}_{\geq 0}$$

 $\{S_n\}$ является невырожденной посл-во

Многогранная посл-ва сходится $\Leftrightarrow$ она ограничена

Теорема 2 (Критерий сходимости)
 ряд с неотр. чл. сход. $\Leftrightarrow$ посл-во его част.
 сумм. отр. ($\{S_n\}$ отр.)

1° Признаки сходимости (взятых сходимость)
 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(2)$ (неотр. ряды)

Теорема 3 (1-ый признак сравнения)
 Пусть $(p_k \leq p_k') \quad \forall k$.

- ① Если сход. (2) $\Rightarrow$ (1) сход. ∇ следствие
 ② Если расх. (1) $\Rightarrow$ (2) расх.

Д-во: $S_n \leq S'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

~~если расх. (1) $\Rightarrow$ (2) расх.~~
~~(1) сход. $\Rightarrow$ (2) сход.~~

~~Если расх. (1) $\Rightarrow$ (2) расх.~~
~~если сход. (1) $\Rightarrow$ (2) сход.~~

① Если $\sum p_k'$ ск., то (с.2) S'_n отр
 $\Rightarrow S_n$ отр $\Rightarrow$ (г.2) $\sum p_k$ ск.

② Если $\sum p_k$ расх., то (г.2) S_n неотр (д.д.н)
 $\Rightarrow S'_n$ неотр $\Rightarrow$ (г.2) $\sum p_k'$ расх.

Зам. 1) Можно считать что $p_k \leq p_k'$
 $\forall k \geq k_0$ (обращивание конечного
 члена (первых k_0-1) не влияет
 на сходимость)

2) Нет-то $p_k \leq p_k'$ можно заменить
 на $p_k \leq c p_k'$ ($c > 0$) (в силу зам. 2 §1)

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится (с неотр. 2.1.)
 $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}, \quad \text{а } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ — сходится,
 $k \neq 1$

Пример 2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, если $\alpha \geq 2$, то

вын. нер-во $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \text{сход.}$

Если $\alpha < 1$, то ряд расх. (расх.)

$0 < \alpha \leq 1$, то $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k} \quad \forall k$ расх.

$\alpha \leq 0$ общие члены $\nrightarrow 0 \Rightarrow$ расх.
 $1 < \alpha < 2$ — неопред.

Теорема 4 (2-й признак сравнения)
 Пусть $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p_k'} = L \neq 0$ (или $L = 0$). Тогда ряды

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ сходятся и расходятся
одновременно

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k \geq N: \left| \frac{p_k}{p_k'} - L \right| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall k \geq N_0: \frac{1}{2} < \frac{p_k}{p_k'} < \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{2} < \frac{p_k}{p_k'} - L < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{p_k}{p_k'} < \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} p_k' < p_k < \frac{3}{2} p_k'$ с какою-то k
 (N_0)

если p_k — сход $\Rightarrow p_k'$ сход. (1)
 если p_k — расх $\Rightarrow p_k'$ расх. (2) $\forall k \geq N_0$
 если p_k' — расх $\Rightarrow p_k$ расх. (1)
 если p_k' — сход $\Rightarrow p_k$ сход. (2)

Теорема 5 (3-ий признак равенства)

Тогда $p_{k'} > 0, p_k > 0 \quad \forall k \geq k_1$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'} \quad \forall k \geq k_1, \text{ тогда выполняются}$$

ооа $y \in L$ τ_3 $p_k, p_{ack} \Rightarrow p_k', p_{ack}$
 $p_k' \quad \text{сход} \Rightarrow p_k \text{ сход}$

Pok-lo

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}, \quad k = k_1$$

$$\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}} \leq \frac{p_{k+2}'}{p_{k+1}'} \dots \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p_{n+1}'}{p_n'}$$

Переключили их позвонки

$$\frac{p_{n+1}}{p_{k_1}} \leq \frac{p_{n+1}}{p_{k_1'}} \quad \forall n \geq k_1$$

$$p_{n+1} \leq \left(\frac{p_k}{p_k} \right) p_{n+1} \quad \text{yfl. } a.3.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, p_k \geq 0$$

Пример: гарм. ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится

$$H_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \text{ (не о.г.} \Rightarrow \sigma, \sigma_n)$$

$$1) \ln(1+t) < t \quad \forall t > 0$$

$$2) \forall k \in \mathbb{N}: \ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k}$$

$$0 < \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \stackrel{\text{Максимум}}{=}$$

$$= \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \overline{0} \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ upon } k \rightarrow \infty$$

$$[\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k})] / \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

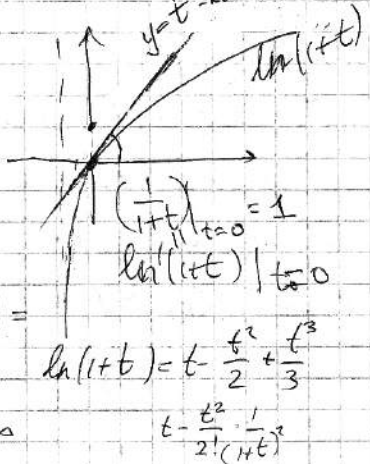
$$\sum \frac{1}{k^2} \text{ сходится} \Rightarrow$$

3) ряд с полужит. гласными

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) \text{ сходится}$$

Пусть его сумма равна S_0

$$u) H_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)}_{\rightarrow C_0} + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = C_0 + \cancel{\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} + \ln(n+1) =$$



$$= \left\{ \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) \right\}$$

$$= C_0 + \ln n + \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln n + C_0 + o(1)$$

$C_0 \approx 0,477$ константа Эйлера (известно, раз. ли это число)

2) Признаки Коши и Даламбера

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) \sim \sum q^k - \text{гек. геом. прогр.}, p_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Теорема 6 (признак Коши)

① Если $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow \text{ред } (*) \text{ сходится}$

Если $\sqrt[k]{p_k} \geq 1 \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow \text{ред } (*) \text{ расходится}$

② Пусть $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k}$. Тогда при $q < 1$ $(*)$ сход., $q > 1$ - ред $(*)$ расх.

При $q = 1$ может и сход. и расх.

③ $\text{до } \textcircled{1} \sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \Rightarrow p_k \leq q^k \quad \forall k \geq k_0$,
 $\sum_{k=1}^{\infty} q^k, q < 1$ - сходится $\Rightarrow$ по ~~крит.~~ I признаку
 сравнения ряд сходится.

$\sqrt[k]{p_k} \geq 1 \Rightarrow p_k \geq 1 \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow$ не выполняемо
 необх. условие $\Rightarrow \text{ред } (*) \text{ расходится}$

④ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} < 1 (=q) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0$:
 $|\sqrt[k]{p_k} - q| < \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{1-q}{2}$$

Тогда $\forall k \geq k_0$:

$$\sqrt[k]{p_k} < 1 - \varepsilon = 1 - \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} < 1$$

$$\sqrt[k]{p_k} < q + \varepsilon = q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} < 1$$

$\Rightarrow \textcircled{1} \Rightarrow \text{ред } (*) \text{ сходится}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = q > 1$$

$$\forall k \geq k_0 \quad \sqrt[k]{p_k} \geq \frac{1+q}{2} > 1$$

$\Rightarrow \textcircled{2} \Rightarrow \text{ред } (*) \text{ расходится}$

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расх. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1 \quad (q=1)$$

Замечание 1 Зв. II п. 6 остается справедливым, если

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} \quad (\text{у орг. посл-ти верхний предел } \exists)$$

(макс. пред. т.)

Если $q < 1$, то все n -ти посл. $\sqrt[k]{p_k}$, кроме,

всех может, конечного числа расположено
 левее числа $q + \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$ (иначе $\exists$ эр. пред.)

При $q < 1 \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0: \sqrt[k]{p_k} \leq q + \varepsilon < 1$

$$\left[\frac{1}{q} \right] \frac{q+\varepsilon}{1}$$

$\Rightarrow \textcircled{1} \Rightarrow (*) \text{ сходится} \quad \textcircled{6}$

Если $q > 1$, то $\exists$ такая $n \sqrt[n]{p_k} \rightarrow q$ $\frac{1}{1+q}$
 Начиная с нек. номера $n \sqrt[n]{p_k} > q - \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$)

$\Rightarrow p_k > 1 \Rightarrow$ не вып. необх. усл. $\Rightarrow$ (4) расх.

Теорема 7 (признак Даламбера)

Пусть $p_k > 0$ начиная с нек. номера

① Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0$, то (4) сходится

Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \quad \forall k \geq k_0$, то (4) расходится

② Здесь $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k}$. Если $q < 1 \Rightarrow$ (4) сходится

Если $q > 1 \Rightarrow$ (4) расходится

$q = 1$ ничего сказать нельзя.

Д-во ① $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0$, $\frac{p_{k+1}}{p_k} = q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т-5 III признак справн, $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q$

сходится $\Rightarrow$ (4) сход.

$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \Rightarrow p_{k+1} \geq p_k \Rightarrow$ посл. p_k -неубывающая

$\forall k \geq k_0$ и не выполнено необх. усл. сход.
 (так $p_k > 0$ то Σ будет возрастать)

② аналогично 2-му п. II т-6

Замечания а) в случае $q = 1$ п. II

$\exists$ примеры рядов, кот. сход. и расходится
 ряды, рассмотренные в примере 1
 подходят

б) усл. п. II теор. 7 остается справедливым
 Если $q = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k / p_k$ (аналогичное э-во)

③ Сравнение признаков Коши и Даламбера

Пример: $\sum_{k=1}^{\infty} (3 + (-1)^k) / 2^{k+1}$ p_k , положим
 посл.

т-к Даламбера: $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(3 + (-1)^{k+1}) 2^{k+1}}{(3 + (-1)^k) 2^{k+2}} = \frac{(3 + (-1)^{k+1})}{2(3 + (-1)^k)}$

$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{2 \cdot 2} = 1, \quad \frac{2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4} \end{array} \right\}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1 = q$ (не
 подходит признак Даламбера)

т-к Коши $\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\frac{3 + (-1)^k}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2} \sqrt[k]{\frac{3 + (-1)^k}{2}} =$

$\xrightarrow[k \geq 2]{b \geq 2} \left(\frac{1}{2} \sqrt[k]{2} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ряд сходится

Гипотеза: признак Коши "сильнее" признака Даламбера

1) $\exists$ ряды с нестр. зп, где $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ коэф. Коши
 даёт ответ, а Даламбер - нет ($q = 1$)

2) всякий раз, когда признак Даламбера
 даёт ответ по сходимости ряда с нестр. зп,
 Коши даёт такой же ответ.

Лемма Если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \in [0, +\infty]$

то $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$

Доказательство:

$$\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\underbrace{p_{k-1}}_{a_k''} \cdot \underbrace{p_{k-2}}_{a_{k-1}''} \cdot \dots \cdot \underbrace{p_1}_{a_2''} \cdot \underbrace{p_0}_{a_1''}} \quad p_i > 0$$

(ср. пом. $a_1, \dots, a_k$)

то условие $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_1 \cdot \dots \cdot a_k} = L$?

Пусть $L \in (0, +\infty)$ ($\neq 0, \neq +\infty$)

то условие $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln a_k = \ln L \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (\ln(a_1) + \dots + \ln(a_k)) = \ln L$ (непр. ф-ция)

? $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_k}{k} = b$

$$\left| \frac{b_1 + \dots + b_k}{k} - b \right| = \left| \frac{(b_1 - b) + (b_2 - b) + \dots + (b_k - b)}{k} \right|$$

$$\forall N \leq k \Rightarrow \left| \frac{(b_1 - b) + \dots + (b_{N-1} - b)}{k} + \frac{(b_N - b) + \dots + (b_k - b)}{k} \right| \leq$$

т.к. $b_k \rightarrow b \Rightarrow b_k - b \rightarrow 0 \Rightarrow \exists M \quad |b_k - b| \leq M \quad \forall k$ (ограничен.)

$$\leq \frac{|b_1 - b| + \dots + |b_{N-1} - b|}{k} + \frac{|b_N - b| + \dots + |b_k - b|}{k} \leq$$

$$\leq \frac{(N-1)M}{k} + \frac{(k-N+1)\varepsilon}{k} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\{b_k \rightarrow b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k \geq N : |b_k - b| < \varepsilon\}$

$\Rightarrow$ все мер. $\leq \varepsilon$

$\{ \exists N, \geq N : \forall k \geq N, \frac{N-1}{k} M < \varepsilon, M, \varepsilon - \text{фикс.} \}$

Если $L \in (0, +\infty) \Rightarrow$ лемма Д-на,

Случай $L=0, L=+\infty$ 2-го самостоятелно

Лемма Шора
Сергеевич

⑦ Интегральные признаки Кэли-Маклорена

Теорема 8 (признаки Кэли-Мак.)

Пусть $f(x) \geq 0$ и не возрастает на промежутке $x \geq 1$. Тогда для того, чтобы сходился числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ (*)

необходимо и достаточно, чтобы сходился след. посл-ва $\{a_n\}$

$$a_n = \int_1^n f(x) dx \quad \left(\int_1^{\infty} f(x) dx - \text{сходится} \right)$$

Доказательство. Фиксируем $k \geq 2$ и рассмотрим $f(x)$ на $x \in [k-1, k]$

т.к. $f(x)$ не $\uparrow \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

и $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$

$\Rightarrow f(x)$ ограничена на $[k-1, k]$

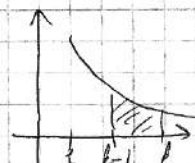
и монотонна $\Rightarrow$ она

интегрируема на $[k-1, k]$ (лемма Д-на)

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx = f(k-1) \cdot \int_{k-1}^k dx = f(k-1)$$

$$\Rightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1) \quad \forall k=2, 3, \dots, n$$

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx \quad (\text{лемма Д-на})$$



⑧

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(1)$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x) dx \leq f(2)$$

$$f(4) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_n \Rightarrow$$

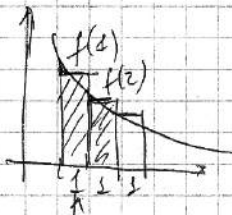
$$S_n - f(1) \leq a_n \leq S_n$$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \{a_n\}$ не убывает.

Для ее сходимости $(\Rightarrow)$ ее ограниченность

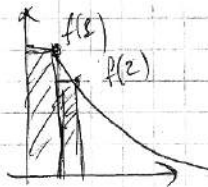
$f(k) \geq 0 \Rightarrow$ для с.г. ряда $(*) \Leftrightarrow \{S_n\}$ ограниченна
т.е.

из полученных нер-в $\Rightarrow$ для ограниченности $\{S_n\} \Leftrightarrow \{a_n\}$ - ограничена (т.е. сходится),
т.е.



и она не площадь

S_n - площадь n -г.з.г.



$$S_n - f(1)$$

$$\Rightarrow S_n - f(1) \leq \{a_n\} \leq S_n$$

Замечание: можно рассмотреть $f(x)$ на $x \geq m, m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \sim a_n = \int_m^n f(x) dx$$

Пример: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

1) $\alpha \leq 0 \Rightarrow$ расходится

2) $\alpha > 0 \quad f(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0, \downarrow$ на $(1, +\infty)$ ($k \geq 1$)

$\Rightarrow$ ряд сходится $\Leftrightarrow a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx =$

$$= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, \alpha \neq 1$$

$$= \ln n, \alpha = 1$$

$1-\alpha > 0 \Rightarrow$ ряд сходится ($\alpha < 1$)

$\alpha = 1 \Rightarrow$ ряд расходится ($\alpha = 1$)

$1-\alpha < 0 \Rightarrow$ ряд расходится ($\alpha > 1$)

расходится $\neq$ сходится

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_2^{\infty}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{\alpha} x} =$$

$$\alpha \leq 1 \text{ расх.}$$

$$\alpha > 1 \text{ сход}$$

§3 Перестановки слагаемых в сходящихся числовых рядах

Рассм. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $u_k \in \mathbb{R}$ (1)

$a+b = b+a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Если в (1) переставить конечное число слагаемых то ничего не изменится а если бесконечное?

Опр. Ряд (1) - абс. сход., если сход. $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ (2)

Утв: (1) - сход. абс $\Rightarrow$ (1) сход.

(2) - сход. $\Rightarrow$ (1) сход. Обратное неверно

Д-во: из сх-ты (2): $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$
 $\forall p \in \mathbb{N}:$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon \quad (\text{Критерий Коши})$$

$\Rightarrow$ (1) сходится, т.д.

Обратное неверно. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ - гарм. ряд; расх.}$$

Значит, ряд (3) расход.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n (-1)^{n-1}}{n} + R_n(x)$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0, 1] \quad (\text{Лемма 2-го})$$

Положим $x=1$:

$$\ln(2) = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_n(x)$$

$$\Rightarrow S_n \Rightarrow \ln 2 \Rightarrow (3) \text{ сход.}$$

Опр. Ряд (1) имеет усл. сход., если (1) сход, а ряд (2) расх. ($\Rightarrow$ (3) усл. сходится)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \text{ - абс. сходящийся}$$

$$\sum_{k=1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{1+\varepsilon}} \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ - абс. сход.}$$

Рассм. (3) Переставим слагаемые в (3):
 после 1-го слагаемого 2-е -

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \quad (4)$$

$$S_{3n} = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n})$$

сумма конечная, можно переставлять слагаемые.

$$\Leftrightarrow (1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n}) \Leftrightarrow (10)$$

Добавим нек. новый ред. На каждом шаге мы добавляем или вычитаем кое-какое одно слагаемое $u_k(1) \Rightarrow$ в итоге в новый ред войдут все слагаемые (1) и никакие посторонних слагаемых в нем не будет.

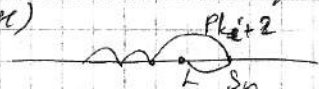
Докажем, что построенный ред $\rightarrow L$

Д.к. (1)-сход. $\Rightarrow u_k = o(1) \Rightarrow p_k = o(1), q_k = o(1)$
 $k \rightarrow +\infty \quad k \rightarrow +\infty \quad k \rightarrow +\infty$

Новый ред состоит из последовательных групп "+" и "-" слагаемых.

Фиксируем любое $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим частичную сумму S_n нового ряда.

Если S_n оканчивается полностью завершённой группой, то она отличается от L не более, чем модуль последнего слагаемого той последней группы (иначе бы могли прибавлять (вычитать) последние члены)

$$|S_n - L| \leq p_{k+2}$$


Если S_n оканчивается не завершённой группой, то S_n отличается от L не более, чем на модуль последнего слагаемого предпоследней группы (т.е. последней завершённой группы)

$$\Rightarrow \text{для того, чтобы это, } q_{k+1} \quad |S_n - L| \leq q_{k+1}$$

то ред $\rightarrow L$
 достаточно это последних S_n не являются членами групп явл. p_k всего б.м.н

Но по так, т.к. $p_k \rightarrow 0, q_k \rightarrow 0$
 $k \rightarrow +\infty$

Задана в ~~качестве~~ $x = \{+\infty, -\infty, \infty\}$
 где подходит

Теорема 10 (теор. Коши) Если (1) сход. абс., то как бы мы не переставляли слагаемые, то (1)' будет сходиться (абсолютно) и к тому же пределу.

Д-во: пусть ред (1) сход. абс. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$:

$$(3) \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{сумма (1)} = S')$$

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ - к-м. ред, полученный из (1) путём переставления.

Д-во: 1) ред $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k$ (2) - сход. и его сумма $= S'$

2) (2) сход. абс.

1) Обозначим S_n, S'_n - част. суммы (1) и (2) соотв. Фиксируем N настолько большое ($N > N_0$) чтобы $\forall n > N$ в S'_n входило все слагаемое u_k ряда (1), $k \leq N_0$

Пусть $n > N$, рассмотрим:

$$|S'_n - S'| = |S'_n + S'_{N_0} - S'_{N_0} - S'| \leq |S'_n - S'_{N_0}| + |S'_{N_0} - S'| \leq$$

$$\leq \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

В первом модуле все первые N_0 слагаемых

(12)

ред (1) фактически

$\Rightarrow$ ред (2) - сходится и его сумма = $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

2) Достаточно повторить рассужд. 1) применительно к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |u'_k|$$

$\Rightarrow$ (2) - сход. абс. и его сумма = сумма $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ абс.

§4 Сложение и умножение сходящихся числовых рядов

Рассмотрим числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, $u_k, v_k \in \mathbb{R}$ (1)

u_n, v_n - частичные суммы этих рядов
 u, v - их суммы.

Теорема 11 Пусть (1) сходится тогда сходится (а) ± (б) (= $\sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = u \pm v$)
имеет вид +
имеет вид -

Но из сходящихся рядов можно поэлементно складывать (вычитать)

До-во: $\forall n: \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^n u_k \pm \sum_{k=1}^n v_k = u_n \pm v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \pm v$ (было 2-но)

Теорема 12. Пусть ряд (1) сход. абсолютно. Тогда ряд, составленный из произведений $u_k \cdot v_k$ (в произвольном порядке занумерованных)

сходится абс. и его сумма = $u \cdot v$

До-во: Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$, составленный из произведений чисел $u_k \cdot v_m$, занумерованных в произвольном порядке. Докажем, что ряд сходится абсолютно.

Фиксируем произвольный n и рассм.

$\sum_{k=1}^n |w_k|$. В эту сумму входит слагаемое

$u_k \cdot v_m$ с некоторыми номерами k и m . Через p обозначим номер, и номер (l, m) членов ряда (1), входящих в эту сумму.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |w_k| \leq (\underbrace{|u_1| + \dots + |u_p|}_{\text{огр.}}) (\underbrace{|v_1| + \dots + |v_p|}_{\text{огр.}})$$

т.е. ряд (1) сход. абс. $\Rightarrow$ част. их суммы ограничены $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ ограничена

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |w_k| \rightarrow A \text{ (т.е. сходится).}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} w_k \text{ сход. абс.} \Rightarrow \{ \text{но и конв.} \}$$

при любых перестановках слас. ряд сходится и сумма не меняется.

Рассмотрим n -ю частичную сумму вида:

$$(u_1 + \dots + u_n)(v_1 + \dots + v_n) = u_n \cdot v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \cdot v$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ имеет сумму равно $u \cdot v$

Но так. ряд сходится уже $\Rightarrow$ все подпослед-и сходятся к сумме (и она равно $u \cdot v$), что. (B)

Правильно концы ~~переходящих~~ переходов

$$(4) \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k \right) = \overbrace{u_1 v_1}^{w_1} + \overbrace{(u_1 v_2 + u_2 v_1)}^{w_2} + \dots + \overbrace{(u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \dots + u_k v_1)}^{w_k} + \dots$$

Сумма индексов одинаковая.

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k \quad (4k)$$

Теорема 13 (теор. Мертенса)

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сход. и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ не $\neq$ сход. а.с.с.
 Тогда $(\sum_{k=1}^{\infty} u_k) (\sum_{k=1}^{\infty} v_k)$ расходится и его сумма $\neq UV$
 Д-во: $w_n = \sum_{k=1}^n w_k = u_1 (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \dots + u_n (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_n v_1$

$$w_n = u_1 v_n + u_2 (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_n (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) + u_n v_1$$

$$= u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1 = u_1 v + u_2 v + \dots + u_n v + u_1 (v_n - v) + u_2 (v_{n-1} - v) + \dots + u_n (v_1 - v) \Rightarrow$$

$$\textcircled{E} \underbrace{V(u_1 + \dots + u_n)}_{n \rightarrow \infty U} + \underbrace{(u_1 d_n + u_2 d_{n-1} + \dots + u_n d_1)}_{(V)}$$

Покажем, что $u_1 d_n + u_2 d_{n-1} + \dots + u_n d_1 \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_k = v_k - V \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Рассм. $m < n$

$$(V) \Rightarrow |u_1 d_n + u_2 d_{n-1} + \dots + u_m d_{n-m+1} + (u_{m+1} d_{n-m} + \dots + u_n d_1)| \leq$$

$$\leq \underbrace{(|u_1| |d_n| + \dots + |u_m| |d_{n-m+1}|)}_{\text{огранич.}} + \underbrace{(|u_{m+1}| |d_{n-m}| + \dots + |u_n| |d_1|)}_{\text{огр.}} = (W) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

т.к. $\Delta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\{u_k\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$ они ограничены

$$\text{и } \exists M > 0: |\Delta_k| \leq M \quad |u_k| \leq M \quad \forall k$$

так $\sum |u_k|$ сход. $\Rightarrow$ n -го его частичных сумм индекс n предел $\Rightarrow$ ограничен

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |u_k| \leq M \quad \forall n \quad (M - \text{большая или маленькая константа})$$

т.к. $\sum |u_k|$ сход $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon$$

(4)

~~Лемма~~ П.к. n -го $\{a_k\}$ -с.м., $\forall \varepsilon > 0$
и выбранное $m \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$:

$$|a_{n-m+1}| < \varepsilon$$

$$(W) \leq \sum_{k=1}^m M_k + M\varepsilon = 2M\varepsilon = \varepsilon_1 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2M}$$

↑ для $|a_k|$ сумм ↑ от a_k в ε

Важное! Если оба переменных ряда
сходятся условно, то их произведение
(или составленное по правилу (нх))
может быть расходящимся ряд.

нх: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ оба сходятся условно

W_k - не выполнено необходимое условие
сходимости

§5 Сходимость произвольных рядов

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 1) Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ^{а.д.а. (нх) (сход.)}
"крит."

2) Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$?

Критерии достаточные признаки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k v_k}{a_k}$$

шаблон

① Тест-м с о.г.р. умножением

$\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет огранич. ум. (BV) ^{bounded variation}

если сходится сбывающийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$$

Утв 1 Новая посл. с о.г.р. ум. - сходящаяся

Д-во: $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k)$ сход. (к S')

$$S'_n = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + (v_4 - v_3) + \dots \\ \dots + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S'$$

$$\Rightarrow v_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S' + v_1, \text{ т.д.}$$

Утв 2 Утв, обратное утв 1, неверно.

Д-во: $v_k = \frac{(-1)^k}{k} \rightarrow 0$ $|v_{k+1} - v_k| = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^k}{k} \right| =$

$$= \left| (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) \right| = \left| \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - 1 =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} + \frac{1}{N+1} - 1 = 2H_N + \frac{1}{N+1} - 1 = \text{д.д.}$$

$\Rightarrow v_k$ не ест. посл. с о.г.р. ум.

Утв 3 Новая о.г.р. монотонная посл. $\{v_k\}$
имеет ограниченное умножение

Д-во: $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| = (v)$
(все разности
одного знака,
т.к. монотонно)

$$\{v_k\} \uparrow \Rightarrow v_{k+1} \geq v_k \quad \nexists k$$

$$\{v_k\} \downarrow \Rightarrow v_{k+1} \leq v_k$$

$$(V) = + \sum_{k=1}^{\infty} (V_{k+1} - V_k) \quad (?) \quad \text{чер. 2. lo ysl. 1.} \Rightarrow \text{ex } \{ \} \text{ сходится, ex}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (V_{k+1} - V_k) \Rightarrow V - V_1 \quad (\text{сумма})$$

2° Преобразование Абеля

Зл 4 Рассмотрим $\{u_k\}, \{v_k\}$; $S_n = u_1 + \dots + u_n$,

$S_0 = 0 = u_0$. Тогда возможно сд р-во:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$$

($\forall n, \forall p$)

Д-во

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) v_k =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k_1=n-1}^{n+p-1} S_{k_1} v_{k_1+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} (S_k v_k - S_k v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n$$

3° Достаточные условия сходимости

Шаг 14 (1-ый прыжок Абеля). Пусть

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$; $S_n = u_1 + \dots + u_n$, тогда если

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сход.
 - 2) $\{v_k\}$ имеет о.р. у.м.
- $\Rightarrow$ (*) сход.

Д-во! По урл. 1. $V = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$,

$$S^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \text{преобр. Абеля}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \right|$$

(уменьшил разность множителей)

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| |v_k - v_{k+1}| + |S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}|$$

$\rightarrow S_v$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N$:

$$|S_n v_{n+1} - S_v| < \varepsilon/3$$

$$|S_n v_n - S_v| < \varepsilon/3$$

$\forall n \geq N$

П.н. S_k имеет предел $\Rightarrow$ её можно ограничить:

$$M > 0: |S_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Для функ. про (5) $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall p$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |V_{k+1} - V_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

т.к. $\sup u_k$
 $\Rightarrow$ сходится

$$\Rightarrow (4)' \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Теор 15 (2-ой признак Абеля) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k, (4)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

Тогда, если $\left. \begin{array}{l} 1) \{S_n\} \text{ о.р.} \\ 2) \{v_k\} \text{ имеет о.р. } u_k \\ \text{и } \{v_k\} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (4) \text{ сход}$

Насколько такое же

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \right|$$

о.р. д.м. оценка
такого же.

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| |v_k - v_{k+1}| + |S_{n+p}| |v_{n+p}| + |S_n| |v_{n+1}| < M \frac{\varepsilon}{3M} + M \frac{\varepsilon}{3M} + M \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon, \text{ где}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |V_{k+1} - V_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Теорема 16 (признак Дирхле-Абеля)

Пусть в $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k (4)$:

1) $S_N = \sum_{k=1}^N u_k$ ограничена $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow (4) \\ \text{сходится} \end{array} \right\}$

2) $\{v_k\} \searrow 0$ (монотонно)

Д-во: из т. 15 $\Rightarrow \{v_k\}$ имеет ограниченное умножение, т.д.

Следствие т. 14 (Теорема 17, признак Абеля)

Пусть в (4) $\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ сход.} \\ 2) \{v_k\} \text{ монотонн. о.р.} \end{array} \right\} \Rightarrow (4) \text{ сходится}$

Д-во: Следствие т. 14

Теорема 18 (признак Лейбница)

Пусть в равномерно сходящемся ряде

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k v_k, \text{ где } v_k \geq 0, \{v_k\} \searrow 0 \text{ (монот.)}$$

Тогда этот ряд сходится

Д-во: следствие т. 16. $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \leq 0$, т.д.

Пример:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \quad (\alpha > 0), \quad x - \text{фикс. число} \quad (17)$$

$$v_k = \frac{1}{k^2} \searrow 0, \quad S_N = \sum_{k=1}^N \cos kx = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos Nx$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} \cos x + \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + \sin \frac{x}{2} \cos Nx \right)$$

$$= \{ \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{3x}{2} + \sin \left(-\frac{x}{2} \right) + \sin \frac{5x}{2} + \sin \left(-\frac{3x}{2} \right) + \dots + \sin x \left(N + \frac{1}{2} \right) + \sin \left(x \left(\frac{1}{2} - N \right) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \left(x \left(N + \frac{1}{2} \right) \right) - \sin \frac{x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow |S_N| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

При $x=0$ $\sum \cos$ неограничен

$x \in (0, 2\pi)$ ($\sin \frac{x}{2} \neq 0$)

$$2) \quad (*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos kx|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{сход. при } \alpha > 1$$

$\Rightarrow$ При $\alpha > 1$ (*) сход.

$0 < \alpha \leq 1$?

$$3) \quad \sum_{k=1}^N \frac{|\cos kx|}{k^2} \geq \sum_{k=1}^N \frac{\cos^2 kx}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{\cos 2kx + 1}{2k^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\cos 2kx}{k^2} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right) \Rightarrow \text{расх}$$

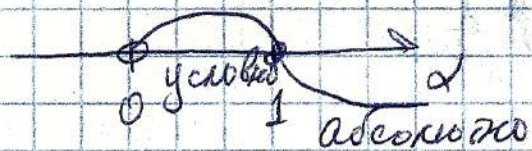
имеет предел. сход. при $0 < \alpha \leq 1$ $x \in (0, \pi)$ $x \in (\pi, 2\pi)$

При $x = \pi$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot (-1)^k}{k^2}$$

отс. расходуется

Ср модуль - знакочередующийся ряд



§6 Бесконечное произведение

$$\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n \cdot \dots = \prod_{k=1}^{+\infty} v_k$$

-бесконечное произведение (*)

$$P_N = \prod_{k=1}^N v_k - \text{частичное произведение}$$

Опр: (*) сходится к P , если $\exists \lim_{N \rightarrow +\infty} P_N = P$ ($P \neq 0$)

$P=0$: упр-е (1), ряд расходуется к 0

Важ. $\forall v_k \neq 0$

Теорема 1 Если (*) сход., то $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 1$

$$\text{Д-во: } v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1 \quad \forall k \geq 2$$

Пример $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0$

$$P_N = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^N} \cdot \sin \frac{x}{2^N}$$

$$= \frac{\sin \frac{x}{2^N}}{\sin \frac{x}{2^N}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^N \sin x}{\sin \frac{x}{2^N}} = \frac{\sin x}{2^N \sin \frac{x}{2^N}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^N}}{\sin \frac{x}{2^N}} \rightarrow 1$$

$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \pi/2$ (ф-ла Вейлеса)

Необх. условие сходим. (4): $v_k \rightarrow 1$

Начиная с нек. номера $v_k > 0$

Теор. 2 Пусть (4) $v_k > 0 \quad \forall k$. Тогда
(4) сходится $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k$ сходится (44)

Д-во: $\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln v_k = S_n$ ряд (44)

P_n имеет предел $\Leftrightarrow \ln P_n$ имеет предел
 $\Leftrightarrow S_n$ имеет предел, т.е.

Пусть $v_k = 1 + u_k$ ($u_k > -1$). Рассмотрим случаи,
когда $u_k > 0$ с нек. номера

2) логарифмы положит. с нек. номера
 $\Rightarrow \sum \ln v_k$ — знакопост. ряд

Теорема 3: Пусть $u_k > 0 \quad \forall k \geq k_0$. Тогда

(44) $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k)$ сход. $\Leftrightarrow$ сход. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Д-во: (т.з.) сход. (44) $\Leftrightarrow$ сход. (44)

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+u_k) \quad v_k \rightarrow 1 \Leftrightarrow u_k \rightarrow 0$
(необх. усл. сходим.)

$\Leftrightarrow \ln(1+u_k) \sim u_k$ при $k \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$ сходим. этого ряда $\Leftrightarrow$ сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, т.е.

§7 Элементарная теория двойных и повторных рядов

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots \\ a_{21} & \dots & a_{2l} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ бесконечная матрица

Двойной ряд $\sim \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ (4)

Повторный ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = A_k \quad \forall k$ (по строкам)

(20)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$$

Сходимость по строкам $\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится.

Если по столбцам сходится,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} = b_l \quad \forall l$$

сход. $\sum_{l=1}^{\infty} b_l = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right)$ сход.

Сход. двойного ряда

Опр (1) $\rightarrow S'$, если $\exists \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} S_{nm} = S'$, где

$$S_{nm} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} \quad (\text{прямоугольная сумма})$$

Условие сходимости $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N}$
 $\forall m \geq m_0, \forall n \geq n_0: |S_{nm} - S'| < \varepsilon$

Пример: В матрице $A: a_{kl} = b_k \cdot c_l$

$$S'_{nm} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m b_k c_l = \sum_{k=1}^n b_k \sum_{l=1}^m c_l =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \left(\sum_{l=1}^m c_l \right) \quad \text{Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сход}$$

и $\sum_{l=1}^{\infty} c_l$ сход к B и C , то

$$S_{nm} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{m \rightarrow +\infty} BC$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & \dots & \dots & \dots \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & \dots & \dots & \dots \\ 1/3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1/3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Если четное число строк, то 0
 Если четное число столбцов, то 0

$$n=2k, m=2l \quad \forall m: S_{nm}=0$$

$$m=2l, \forall n: S_{nm}=0$$

Если $n=2k+1, m=2l+1$, то $S_{nm} = a_{nm}$ (последняя сумма)

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} S_{nm} = 0 \quad (\text{двойной ряд})$$

$$A_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} - \text{расходится во } \forall k \text{ (по строкам)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right) \nexists \text{ (расходится)}$$

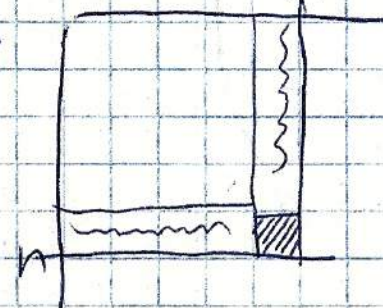
$$B_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = 0 \quad \forall k \text{ (по столбцам)}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right) = 0, \text{ сходится}$$

(21)

Теорема 1 (критерий сход.) Если двойной ряд (1) сход, $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = 0$

Д-во



$$a_{nm} = (S_{nm} + S_{n-1, m-1}) - (S_{n, m-1} + S_{n-1, m}) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$$

Пример

$$(a_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Двойной ряд не сходится т.к. $a_{nm} \not\rightarrow 0$ (на диагонали например)

Повторный ряд сходится (по строкам)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = A_k$$

По столбцам:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} = 1$$

Теорема 2 Если двойной ряд сходится, кроме того, сходятся все ряды A_k (по строкам) $\Rightarrow$ сходится повторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, причём к сумме двойного ряда

Замечание: Аналогичное ф-л. верно и для др. повторного ряда

Д-во Пусть $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} = S' \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_{mn} = S'$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq m_0, n \geq n_0 \Rightarrow |S_{mn} - S'| < \varepsilon$$

Переходим к пределу при $n \rightarrow +\infty$ (фикс. m)

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m A_k$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^m A_k - S' \right| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^m A_k \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} S'$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k = S' \quad \text{т.д.}$$

Пусть в двойном ряде $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ $a_{kl} \geq 0 \forall k, l$

Теорема 3 Необходимое и достаточное условие сходимости

В этом случае двойной ряд эк. $\Leftrightarrow$ мн-во частичных сумм S_{mn} ограничено

Д-во: $S_{mn} \geq 0 \forall m, n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \text{ по опр. сходимости } \Rightarrow \text{ положим } \varepsilon = 1 \\ & \Rightarrow |S_{mn} - S| < 1 \Leftrightarrow S-1 < S_{mn} < S+1 \quad \forall m \geq m_0, n \geq n_0 \end{aligned}$$

~~AB, 200 в начале (m, n) - конечное число~~

S_{mn}
 $1 \leq m < m_0$
 $n \geq n_0$

а если
конечное
число

аналогично

$S'_{m'n} \geq S_{mn}$
 $m' \geq m_0$

$\Rightarrow S+1 > S'_{m'n} \geq S_{mn} \geq 0$
 $\Rightarrow$ ограничена

Пусть $\{S_{mn}\}$ ограничена сверху
числом S' - тогда верхняя грань $\sup S_{mn}$

~~$S_{mn} \leq S$~~ $S_{mn} \leq S \quad \forall m, n$

$\exists m_0, n_0 : S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S \quad \forall \varepsilon > 0$

Все суммы с индексами S_{mn} находятся
 m_0, n_0 здесь

т.к. $S_{m_0 n_0} \leq S_{mn}$

$\Rightarrow S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S_{mn} < S' \Rightarrow S_{mn} \rightarrow S$
 $m \rightarrow +\infty$
 $n \rightarrow +\infty$

Опр: Двойной ряд абс. сходится,
если сходится двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \quad (*)$$

Теорема 4 Если $(*)$ сходится $\Rightarrow \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$
сходится

До (*), $\text{сход} \Rightarrow$ мн-во из разностей сумм
ограничено.

Рассм: $p_{kl} = \frac{1}{2} (|a_{kl}| + a_{kl}) = \begin{cases} 0, & a_{kl} < 0 \\ a_{kl}, & a_{kl} \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow p_{kl} \geq 0$

$g_{kl} = \frac{1}{2} (|a_{kl}| - a_{kl}) = \begin{cases} 0, & a_{kl} > 0 \\ |a_{kl}|, & a_{kl} < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow g_{kl} \geq 0$

т.к. $p_{kl}, g_{kl} \leq |a_{kl}| \Rightarrow$ ряды

$\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl}, \sum_{k,l} g_{kl}$ имеют ограниченные
мн-ва разностей сумм.

Р.З. $\Rightarrow$ они оба сходятся (их суммы равны P и Q)

$\Rightarrow$ сход. ряд $\sum_{k,l=1}^{\infty} (p_{kl} - g_{kl}) = \sum_{k,l} a_{kl}$, что

Рассм. след. ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \quad (1')$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (2)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}| \quad (2')$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (3)$$

$$\sum_{k,l} |a_{kl}| \quad (3')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad (4')$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - поученный из двойного

какой-либо нумерации ~~элементов~~ элементов $\{a_{kl}\}$

Теорема 5: Если хотя бы 1 из рядов (1') - (4') сходится, то сходятся все ряды в первом столбце (1) - (4), причем к одной и той же сумме. (и перестановка слагаемых в абс. сход. ряде)

Д-во Схема: $\overset{\text{сход}}{(1')} \Rightarrow (4') \Rightarrow (3') \Rightarrow (2')$
 $\begin{pmatrix} (1') \\ (4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (4') \\ (4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3') \\ (3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2') \\ (2) \end{pmatrix}$

В д-ве не будем рассматривать (1') $\Rightarrow$ (2), (2) и (2') - они аналогичны (1) и (1')

Сначала докажем факт сходимости, затем совпадение сумм

(1') $\Rightarrow$ (4'). Рассм. зает. сумму S_p' ряда (4')

В силу построения $\forall p \in \mathbb{N} \exists m, n \in \mathbb{N}$

$S_p \leq S_{mn}$ (каждый max m и n и ограничен)
 зает. сумма ряда (3')

$S_{mn}' \leq S'$ в силу сходимости (1') (разобрав!!!)
 $\sum_{k=1}^m a_{kj} \leq \sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq S$ (огр)

$\Rightarrow$ мн-во $\{S_p'\}$ одночленно ряда (4') ограничено $\Rightarrow$ (4') сходится

(4') $\Rightarrow$ (4) (абсолютно сход.)

(4') $\Rightarrow$ (3'). Рассм. мн-во зает. сумм $\{S_{mn}'\}$ ряда (3'). $\forall m, n \exists p: S_{mn}' \leq S_p' \leq S'$ - огр.

$\Rightarrow S_{mn}'$ огр. $\Rightarrow S_{mn}'$ ~~сход.~~ (3') сход.

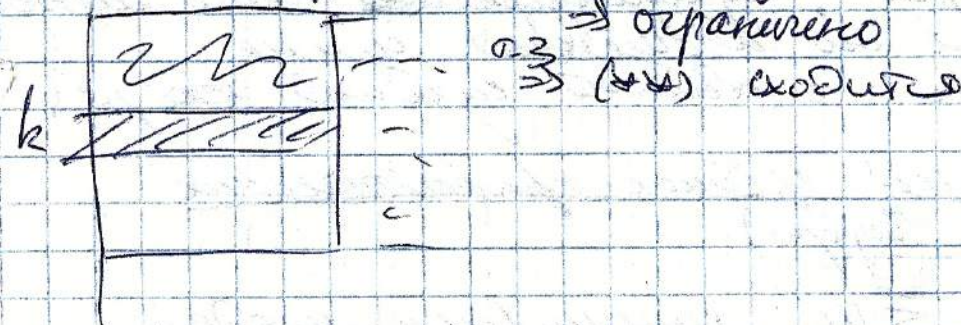
$\Rightarrow$ (3) сход.

(3') $\Rightarrow$ (1'). Чтобы доказать сходимость каждого из рядов (1) и (1'), в силу г. 2: достаточно д-во, что

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}|$ и $\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ сходится $\forall k$

Докажем только (тк. автоматически, одночленно ряды)

(4') сход., тк' $\sum_{l=1}^N |a_{kl}| \leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N |a_{kl}|$ (добавили все представленные строки)
 зает. сумма (3') $\Rightarrow$ ограничено



по г. 2. (1) = (3)

по г. 2. перестановка (3) = (4) - тк. сходятся (3') = (4') (о перестановке слагаемых в абс. сход. рядах)

§8 Обобщенные методы суммирования

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = s' \quad \left. \begin{array}{l} \text{суммируемое} \\ \text{свойство} \end{array} \right\} \text{ обобщенная сумма (lim переход)}$$

Опр 1 Метод суммирования назыв. линейным, если $\forall$ двух рядов

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, суммируемых рассматриваемым методом к обобщ. суммам s' , v' :
ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha s' + \beta v' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
при суммировании этим методом

Опр 2 Метод суммирования назыв. регулярным, если любой обобщенный экв. ряд суммируемый этим методом, примет к обобщенная сумма совпадает с обычной суммой того ряда

① Метод средних арифметических (метод Цезаро)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ суммируем методом Цезаро, если по-прежнему имеет $\{S_n\}$ обладает след. с-вом:

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_1 + \dots + S_n}{n} = s \text{ — обобщенная сумма ряда}$$

Теорема 1 Метод Цезаро линейен и регулярен

$$\text{Л-во} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{мет. Ц}} s \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k \xrightarrow{\text{мет. Ц}} v$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k : \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} = s$$

$$V_n = \sum_{k=1}^n v_k : \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_1 + \dots + v_n}{n} = v$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^n u_k + \beta \sum_{k=1}^n v_k =$$

$$= \alpha U_n + \beta V_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} (S_1 + \dots + S_n) = \alpha \frac{1}{n} (u_1 + \dots + u_n) +$$

$$+ \beta \frac{1}{n} (v_1 + \dots + v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha s + \beta v \Rightarrow \text{линейность доказана}$$

Регулярность:

$$\text{Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ сход.} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = s'$$

(все концы дана)

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (S_1 + \dots + S_n) = s' \Rightarrow \text{метод регулярен, что}$$

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \dots$

$$\frac{1}{n}(S_1 + \dots + S_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n=2k \\ \frac{n+1}{2}, & n=2k+1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Замечание у каждого метода суммирования есть область применения

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ - степенной ряд, $|z| < 1$

При приближении к границе сход. ряд сх., но очень медленно. Некоторые методы ускоряют

Зам. Если $\sum u_n$ - знакочередующаяся и рах $(S_n \rightarrow \pm \infty)$, то в силу св-ва средн. ариф $\frac{1}{n}(S_1 + \dots + S_n) \rightarrow \pm \infty$ (метод не применим к таким рядам)

Пример 2 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot k = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$

$S_1 = 1, S_2 = -1, S_3 = 2, S_4 = -2, \dots$

$$S_n = \begin{cases} -n/2, & n=2k \\ n/2, & n=2k+1 \end{cases}$$

$$S_1 + \dots + S_n = \begin{cases} 0, & n=2k \rightarrow 0 \\ \frac{n+1}{2}, & n=2k+1 \rightarrow 1/2 \end{cases} \Rightarrow \text{не сход.}$$

методом Кезаро

20 Метод Абеля-Вейерштрасса

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} \quad (*) \quad x \in [0, 1)$$

← степенной ряд по переменному x

Зам. Если u_k о.р., то (*) сход. при $x \in [0, 1)$ (Абель-Вейерштрасс)

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) \equiv S' \text{ - обобщ. } \sum$$

Пример 1 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^{k-1} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} = \frac{1}{1+x} \quad (\text{geom. прогр.})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2}$$

Зам. Можно доп., что в любой рах, когда Кезаро даёт Σ , П-А даёт такую же сумму.

Пример 2 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k \quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1}$

$x \in [0, 1)$, функ.

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{k+1} k t^{k-1} dt =$$

законность переклада
будем обобщать
далее в курсе

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k = x \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{4}$$

Теорема 2 л. 11-а сумма и разность

Д-во $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sim S_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1}, \exists \lim_{x \rightarrow 1^-} S_1(x) = U$

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \sim S_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1}, \exists \lim_{x \rightarrow 1^-} S_2(x) = V$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) \sim S(x) = \alpha S_1(x) + \beta S_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \alpha U + \beta V$$

$\Rightarrow$ лем. 2-ка

непрерывность: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$ - сход.

1) н. уа. $u_k \rightarrow 0 \Rightarrow \exists M > 0$:

$$|u_k| \leq M \quad \forall k$$

$(|u_k x^{k-1}| \leq M \cdot x^{k-1} \Rightarrow \text{по неравенству } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1})$
 $\exists S(x) \quad \forall x \in [0, 1)$
сп. (ком. нр.)

2) $\sum_{k=1}^{p+1} u_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{p+1} (S_k - S_{k-1}) x^{k-1} \quad (\text{с})$

$S(x) \stackrel{\text{сп.}}{=} S_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad u_n = S_n - S_{n-1} \quad S_0 = 0 \quad \text{def}$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^{p+1} S_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{p+1} S_{k-1} x^{k-1} = \{S_0 = 0\}$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} S_k x^{k-1} - \sum_{k=2}^{p+1} S_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{p+1} S_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^p S_{k-1} x^k = \sum_{k=1}^p S_k (x^{k-1} - x^k) + \textcircled{S_{p+1} x^p} \rightarrow 0$$

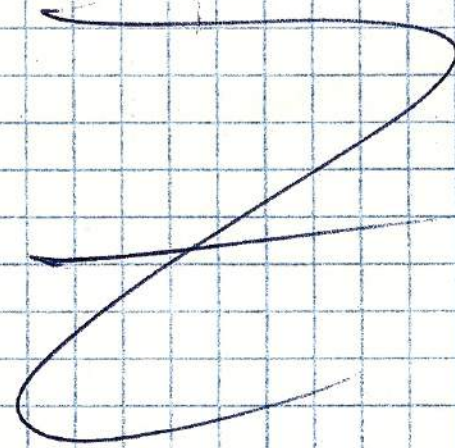
Переходим к л. 11-а $p \rightarrow +\infty$

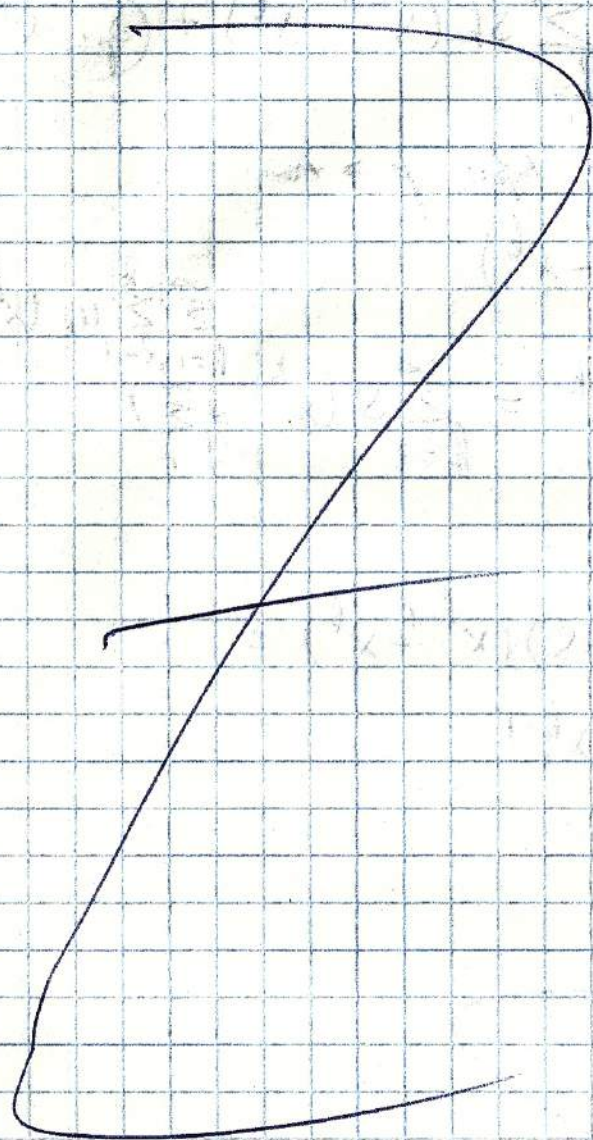
$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k (x^{k-1} - x^k)$$

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} S (x^{k-1} - x^k)$$

$$\text{т.к. } \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$S(x) - S = \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S) (x^{k-1} - x^k) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S) x^{k-1}$$





$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 \Rightarrow |S_k - S| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} (S_k - S) x^{k-1}| \leq (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} |S_k - S| x^{k-1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|(1-x) \sum_{k=1}^{k_0-1} (S - S_k) x^{k-1}| \leq (1-x) \sum_{k=1}^{k_0-1} |S - S_k| x^{k-1} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{т.к. } x \text{ близко к } 1 \Leftrightarrow (1-x) < \frac{\varepsilon}{2C} = \delta, \text{ где}$$

Глава II Функциональные последовательности и ряды

$\{f_n(x)\}$ - посл. чисел. зависит от параметра (x) - функциональный
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - функ. ряд. посл.

Все ф-ции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ } определены на мн-ве $X \subset \mathbb{R}$
 Все ф-ции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ }

§1 Различные виды сходимости

① Почленное схождение

②

$\{f_n(x)\}$ - сходится при $x = x_0 \in X$ - функции посл. сход. в т. x_0

$\Rightarrow \{x_0\}$ - область сходимости для $\{f_n(x)\}$

Примеры: ① $f_n(x) = x^n$ $X = \mathbb{R}$

$\{f_n(x)\}$ сход $\Leftrightarrow x \in (-1, 1] = \{x_0\}$

Предельная ф-ция $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$

② $\{u_n\}$ - числ. посл., отр.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n-1}$ степенной функц. ряд

сходится $\Leftrightarrow |x| < 1 \Rightarrow$ это обл. сходимости содержит $(-1, 1)$

③ $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \Rightarrow$ это обл. сход. $\{x_0\} = \mathbb{R}$

②^о Равномерная сходимость Пусть $x_0 \in \{x_0\} = X$, где X - обл. сход. $\{f_n(x)\}$

Отр $\{f_n(x)\}$ сходится (к $f(x)$) на X_0 равномерно, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in X_0 |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow{x_0} f(x)$

Замечания 1) у равн. сход. посл. на X_0

$\Rightarrow$ ее равн. сход. на $\forall X_0' \subset X_0$

2) Равн. сход. на $X_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in X_0} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Возьмем точную верхнюю грань

$$A_n = \sup_{x \in X_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \exists \sup \text{ на } X_0$$

$\uparrow$ не зависит от x

③ у поточечной сход. $\{f_n(x)\}$ на X_0 , вообще говоря, $\nRightarrow$ равн. сход. на X_0 .

у примера 1: $f_n(x) = x^n$, $X_0 = (-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n - 1 = 1 - 1 = 0 & \{x=1\} \\ |x^n| & \{|x| < 1\} \end{cases}$$

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\rightarrow 0 \Rightarrow \text{нет равномерной сходимости}$$

Если $X_0' = [-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$

$$\sup_{x \in X_0'} |f_n(x) - f(x)| = \alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{равн. сход. на указанном } X_0'$$

Замечание 4 равн. сход. функц. ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $X_0 \Leftrightarrow$ равн. сход.

функц. посл. $\{S_n(x)\}$ на X_0 ,

$$\text{где } S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{X} u(x)$

если $\{S_n(x)\} \xrightarrow{\text{на л. Зам. сущ. } X} u(x)$

2° Критерий Коши

Теорема 1 $\{f_n(x)\} \Rightarrow$ на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Теор 1' $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \Rightarrow$ на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

$$\left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right|$$

Зам 1 Теор 1' - переформулировка Д. 1. с учетом опр. равн. сущ. функц. ряда

Д-во " $\Rightarrow$ ". По опр. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{т.к. } n+p \geq N) \quad \forall p \quad \forall x \in X$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)|$$

$$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in X, \text{ где}$$

" $\Leftarrow$ " $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ ($\Leftrightarrow$ по $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N$
 $\forall p \quad \forall x \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ (крит. Коши. эквив. эквив.))
 Тогда $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \xrightarrow{\lim_{p \rightarrow \infty}} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ т.д.

Если в усл. теор. 1' раскл. только $p=1$

$$|u_{n+1}(x)| < \varepsilon \leftarrow \text{опр. равн. сходимости}$$

на $u_n(x)$ на $\text{лев. } X$

След. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{X}$, то $\{u_k(x)\} \xrightarrow{X} 0$

§2 Критерии равномерной сходимости

Рассм. числ. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на X

1° Функции Вейерштрасса

Теор 2. Пусть $|u_k(x)| \leq a_k \quad \forall k, \forall x \in X$

Кроме того, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сход.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ сход.}$$

Выполнение $|u_k(x)| \leq a_k \quad \forall k, \forall x \in X$ назыв. матричным условием.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - матрица

З-во. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сход $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$

$$\forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon + a_k \geq 0$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon, \text{ где}$$

для всех $x \in X$

Пример $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = (+)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_{n+1}(x)$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad |R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad "S_n(x)"$$

$(+) = \ln(1+x)$ ~~где~~ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ оценка остатка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow{[0, 1]} \ln(1+x)$$

$$\left| \frac{(-1)^k}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{k} \leftarrow \text{расходится}$$

не $\exists$ сход. матрица $\Rightarrow$ не можно применить кр-к Вейерштрасса

2° Функции посл. с равн. огр. суживаются

Опр $\{f_n(x)\}$ назыв. равн. огр. на X , если $\exists M > 0 \quad |f_n(x)| \leq M \quad \forall n \quad \forall x \in X$

Опр $\{f_n(x)\}$ назыв. посл. с равномерной огр. суживаются, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \text{ - сходится равномерно на } X$$

Ув $\perp$ Если посл. $\{f_n(x)\}$ имеет равн. огр. суживаются на X , то она на X равн. сход.

З-во по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \forall p \quad \forall x \in X$$

$$(*) = \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

$$(*) \geq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \right| = |f_{n+1}(x) - f_{n+p+1}(x)|$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \forall p \quad \forall x \in X$$

$$|f_{n+p+1}(x) - f_{n+1}(x)| < \varepsilon \quad (\text{замена } n \rightarrow n+1), \text{ где}$$

Упр 2 Если $\{f_n(x)\} \xrightarrow{X} f(x)$ и монотонна по n
 для каждого фикс. $x \in X$

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$ имеет равн. озн. узн.

До Пусть $\{f_n(x)\}$ не убывает по n
 $\forall$ фикс. $x \in X$

$$(f_{n+1}(x) \geq f_n(x)) \quad \forall \text{ фикс. } x \in X$$

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \sum_{k=1}^N (f_{k+1}(x) - f_k(x)) =$$

$$= f_{N+1}(x) - f_1(x) \xrightarrow{X} f(x) - f_1(x) \text{ равн. сх.}, \text{ где}$$

$\uparrow$ не зависит от N

Замечание для числ. посл. $\{v_n\}$ с озн. узн.
 $\{v_n\}$ сходится $\Rightarrow \{v_n\}$ ограничена

можно вставить "равномерно"

Рассм. $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \quad 0 < x < 1 (=X)$

$$f_n(x) \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\sup_{x \in X} \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{X} 1/x$$

Но $f_n(x)$ не явл. равн. озн.

$$\Rightarrow \{v_n(x)\} \xrightarrow{X} \neq \{v_n(x)\} \text{ равн. озн.}$$

3° Критерии Абеля

Шаг 3 1-ый критерий Абеля

$$\sum_{k=1}^n u_k(x)/v_k(x) \quad (*) ; \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

Пусть 1) Част. суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

равн. озн. на $X : |S_n(x)| \leq M \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\{v_k(x)\} \rightarrow 0 \quad \forall x \in X$ и $\{v_k(x)\}$ имеет равн. озн. убывание на X

Тогда $(*)$ равн. сх. на X

До из условия 2) и упр 1 (2°) $\Rightarrow$

$$\{v_k(x)\} \xrightarrow{X} 0$$

Множественное Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{np} u_k(x)/v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{np-1} \underbrace{(S_k(x))}_{\leq M} \underbrace{(v_k(x) - v_{k+1}(x))}_{\geq 0}$$

$$+ \underbrace{(S_{np}(x))}_{\leq M} v_{np}(x) - \underbrace{(S_n(x))}_{\leq M} v_n(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \text{по упр. } \exists M > 0 \quad |S_n(x)| \leq M \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad |v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{np} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{np} u_k(x)/v_k(x) \right| \leq M \left(\sum_{k=n+1}^{np} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \right) +$$

$$+ M|v_{np}(x)| + M|v_n(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon, \text{ где}$$

Теор 4 (следствие) (признак Дирихле-Абеля)

Пусть

1) $\{S_n(x)\}$ равн. огр. на X

2) $\{v_k(x)\} \xrightarrow{x} 0$; $\{v_k(x)\}$ монотонна по k фикс $x \in X$

Тогда (*) равн. сх на X

До-во: из усл 2) и утв. 2 (2°)
 $\Rightarrow \{v_k(x)\}$ имеет равн. огр. цм. $\forall x \in X$
 $\Rightarrow$ теорема 3, гд.

Теор 5 (2-ой признак Абеля)

1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{x}$

2) $\{v_k(x)\}$ имеет равн. огр. цм на X
 $\{v_k(x)\}$ равн. огр. на X

Тогда (*) равн. сходится на X

До-во $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} :$

$$\left| \sum_{k=N}^{n_1} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad \left(\begin{array}{l} \text{здесь сумма начинается} \\ \text{с нек. } N \end{array} \right)$$

по крит. каучи $\forall x \in X \quad \forall n_1 \geq N$

Тонид. Абеля.

$$\sum_{k=n+1}^{np} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{np-1} \hat{S}_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x)) + \hat{S}_{np}(x) v_{np}(x) - \hat{S}_n(x) v_{n+1}(x)$$

сумма сг. монотонно сходится

сумма сг. $\forall k \geq N$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \geq N : \forall n \geq N_1 :$

$$|v_{np}(x)| \leq M, |v_{n+1}(x)| \leq M \quad \forall x \in X$$

$$\sum_{k=1}^{np} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \leq M \quad \forall x \in X$$

т.е. равн. огр. цм.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{np} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot M = 3\varepsilon M = \varepsilon,$$

Теорема 6 (признак Абеля)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) v_k(x) \quad (*)$$

Пусть: 1) $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \xrightarrow{x}$

2) $\{v_k(x)\}$ равн. огр. на X и монотонна при любом фикс. $x \in X$

Тогда: (*) сход. равн. на X

$$\sum_{k=n+1}^{np} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{np-1} \hat{S}_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x)) + \hat{S}_{np}(x) v_{np}(x) - \hat{S}_n(x) v_{n+1}(x) \quad \forall n \geq N$$

$$\hat{S}_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

До-во: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad \left| \hat{S}_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$
 где $M > 0 : |v_k(x)| \leq M \quad \forall x \in X \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |\hat{S}_k(x)| |v_k(x) - v_{k+1}(x)| \\
 & + |\hat{S}_{n+p}(x)| |v_{n+p}(x)| + |\hat{S}_n(x)| |v_n(x)| \leq \\
 & \leq \sum_{3M} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \underbrace{(v_k(x) - v_{k+1}(x))}_{\substack{\text{в сумме } v_k(x) - \\ \text{монотонно убывает} \\ \text{(не возрастает)}}} + \frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3M} M = \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{3M} \underbrace{(v_n(x) - v_{n+p}(x))}_{\leq 2M} + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{4\varepsilon}{3}$$

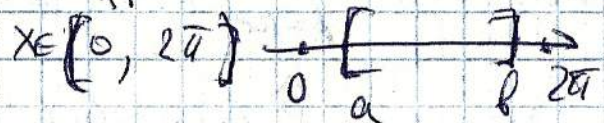
Пример $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится при всех x

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad \forall x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

(при этих x знаменатель $\rightarrow 0$)

$$\frac{1}{n} \downarrow 0$$

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \max\left(\frac{1}{\sin \frac{a}{2}}, \frac{1}{\sin \frac{b}{2}}\right)$$



$$v_n(x) = \frac{1}{n} \downarrow 0$$

$\Rightarrow$ по теореме Дирхле - Абеля
 (4) сход. на $[a, b]$ (для $(a, b) = (0, 2\pi)$)
 по ред. к эт. разн. сход.

40) Критерий Дини

Теорема 7. Пусть $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X$,
 при этом

1) X -компактно (отр. замкн.) $\rightarrow$ компактно по своей топологии

2) $\{f_n(x)\}$ монотонна $\forall$ фикс. x

3) $f_n(x) \in C[X], f(x) \in C[X]$
 $\forall n$

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$$

Доказ. Пусть $\{f_n(x)\}$ монотонно $\forall$ фикс. $x \in X$

$$v_n(x) = f(x) - f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{не возр.}) \quad \forall x \in X \quad \uparrow \text{м. } (f_n(x)) \uparrow$$

$$\Rightarrow v_n(x) \geq 0$$

$$3) \Rightarrow v_n(x) \in C[X]$$

~~Предположим~~ упр. $\varepsilon > 0$ по лемме, что

$$v_n(x) \xrightarrow{X} 0$$

$$\text{Пусть } v_n(x) \not\xrightarrow{X} 0$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \exists x_n \in X :$$

$$v_n(x_n) \geq \varepsilon_0$$

Рассм. мн-во $\{x_n\} \subset X$ (отр. замкн.)

$\Rightarrow \{x_n\}$ отр. $\xrightarrow{\text{Боллв.-Вейер.}} \exists \{x_{n_k}\}$ сходится к $x_0 \in X$

(34)

$\forall m \in \mathbb{N}$: расем. $z_m(x) : z_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$

$\downarrow$ $\exists n_k \geq m : z_{n_k}(x_{n_k}) \in z_m(x_{n_k})$
 {монотонность}

Это кер-во вымощено $\Rightarrow z_{n_{k+i}}(x_{n_{k+i}}) \leq z_m(x_{n_{k+i}}) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (n_{k+i} > n_k)$

Таким образом кер-во $z_{n_k}(x_{n_k}) \leq z_m(x_{n_k})$ выполнено $\forall n_k \geq m$

$\forall n \Rightarrow z_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0 \Rightarrow z_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$

$\forall n_k \geq m$

Устремим $k \rightarrow +\infty$ при каждом фикс. m .

$$\varepsilon_0 \leq z_{n_k}(x_{n_k}) \leq z_m(x_{n_k})$$

$$k \rightarrow +\infty : \varepsilon_0 \leq \dots \leq z_m(x_0)$$

$$\Rightarrow z_m(x_0) \geq \varepsilon_0 \quad \forall m \quad \text{ко } z_m(x_0) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \emptyset$, пр.

Теорема 7' (Другая форма для функции ряда)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \quad \forall x \in X$, и выполнено:

1) X -компакт

2) $\{S_n(x)\}$ монотонна ($\Rightarrow u_n(x) \geq 0$ "↑"
 (≤ 0) "↓" $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$)

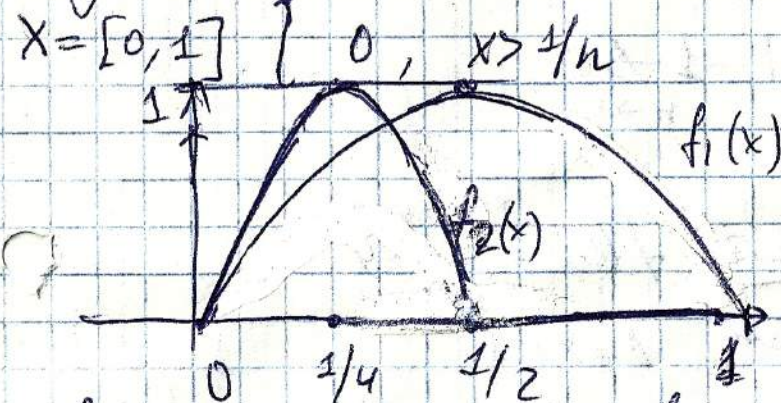
3) $u_n(x), S(x) \in C[X]$

$\Rightarrow$ ряд сходится равномерно на X

Замечание (убираем по одному условию)

I) без усл. (2) убв. 1-7 неверно

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi n x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$



во усл. кроме (2) выполняется

$$X = [0, 1]$$

$$\forall x > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq N$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 = f(x)$$

монотонности нет! посл. счел. f , тогда x ,
тогда 0.

Покажем, что сходимость неравномерна.

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \nearrow \text{не } 0.$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = 1 \not\rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

II) Рассм. $f_n(x) = x^n, x \geq 0$

При $x = 0 \leq x \leq 1$ - $f_n(x)$ сходится

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

монотонна $\forall$ фикс. $x \in X$
($\searrow$)

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

x^n макс

Не выполняется: $f(x) \in C(X)$

III) Рассм. $f_n(x) = x^n, 0 \leq x < 1$.

Не выполняется: $\rightarrow 1$

$$\text{Но } \sup = 1 \not\rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

IV) $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Не выполняется: $f_n \in C(X)$

$$\text{Но } \sup = 1 \not\rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

§3 Функциональные св-ва функц. посл. и рядов

$$\{f_n(x)\} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

$\{ \text{св-ва?} \} \quad \{ \text{св-ва?} \}$
 $f(x) \quad S(x)$

① Переход к пределу непрерывности

$X \subset \mathbb{R}, \forall a \in X$. a -пред. т. для X

Теорема 8 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ - равн. сход. на X

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$$

$\forall n \exists \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = b_n$. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ сход. и } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \lim_{x \rightarrow a} S(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$$

До (I)

Критерий Коши: равн. сход.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X:$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad : x \rightarrow a$$

$\uparrow$ конечная сумма

(36)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходится

$$S(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \underbrace{\sum_{k=1}^N u_k(x)}_{\text{маленькие}} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x)}_{\text{остаток ряда}} - \underbrace{\sum_{k=1}^N b_k}_{\text{маленькие}} - \underbrace{\sum_{k=N+1}^{+\infty} b_k}_{\text{остаток ряда}} = (*)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$(*) = \underbrace{\sum_{k=1}^N (u_k(x) - b_k)}_{\text{маленькие}} - \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} b_k = (**)$$

$$\exists \delta > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |u_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{3N} \quad k=1 \dots n$$

$$(**) \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| S(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

след. б. т. м.
след. с. п. н.
* след. б. т. м.
* след. с. п. н.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

$x \in (0, 2\pi) = X$ и б.д. неравномерно.
 $x_0 = 0$ - пред. т. x

$$\forall n \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos nx}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{если ряд с. п. н.,}$$

$$\text{то } \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расх.} \Rightarrow \text{нет}$$

Предложение 1 $x_0 \in X$, x_0 - пред. т. X , $f_n \xrightarrow{X} f$,

$\forall n$ f_n непрерывна в x_0 . Тогда f непрерывна в x_0 .

$$\text{Доказ. } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ непрерывна в } x_0$$

Предложение 1' $x_0 \in X$, x_0 - пред. т. X ,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с. п. н. и $S(x)$ на X , $u_n(x)$ непрерывна в x_0 , $n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x)$ непрерывна в x_0 .

Предложение 2 Пусть X плотно в себе (кажд. т. явл. предельным)

$$f_n \in C(X), n \in \mathbb{N}, f_n \xrightarrow{X} f \Rightarrow f \in C(X) \quad (37)$$

Следствие 2' X плотно в себе,
 $u_n \in C(X)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ск. равн. к $\varphi'(x)$ на X

$$\Rightarrow \varphi' \in C(X)$$

Опр f дифф. на $[a, b]$, если $\forall x \in (a, b)$
 $\exists f'(x)$, $\exists f'(a+)$, $f'(b-)$

Ранее брели касат $f'(k)$ $\forall x \in [a, b]$, на
 концах подразумевалось односторонние
 производные.

Теорема о поэлементном дифф. функц. посл.

Пусть $\{f_n(x)\}$, $\forall n$ дифф. на $[a, b]$,
 $\{f_n'(x)\} \xrightarrow{[a, b]}$, $\{f_n(x)\}$ сход. хотя бы в
 $I \subset [a, b]$

Тогда:

$$1) \{f_n(x)\} \text{ ск. равн. на } [a, b], f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$2) f \text{ дифф. на } [a, b], f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$$

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$$

$$\text{До 1) } \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \forall x \in [a, b] |f_n'(x) - f_{n+p}'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$2) \exists N_2(\varepsilon) : \forall n \geq N_2 \forall p \in \mathbb{N} : |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Возьмем } N = \max(N_1, N_2), n \geq N, p \in \mathbb{N}$$

$$y(x) = f_n(x) - f_{n+p}(x) \leftarrow \text{диф-ные на } [a, b]$$

$$y(x) - y(x_0) = y'(\xi_x)(x - x_0) \quad \xi_x \text{ между } x \text{ и } x_0$$

$$\Rightarrow |y(x)| \leq |y(x_0)| + |y'(\xi_x)| |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ выполнение критерия ~~равн~~ ~~сход.~~ ~~посл.~~ $\{f_n(x)\}$ на $[a, b]$.

$$2) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in [a, b], x \text{ - фикс.}$$

$$\exists f_n'(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t \in [a, b]}} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$$

$$\forall t \in [a, b] \setminus x \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$\text{Если мы покажем, что } \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \text{ сход.}$$

равн. на мн-ве $M = [a, b] \setminus x$. x - пред. т. M

$\Rightarrow$ по т. о пред. переходе.

$$\exists \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t \in M}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$$

д.л. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} f'_n(x)$

кр. концы равн. сход. $\{f'_n\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall t \in [a, b]$$

$$|f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} - \frac{f_{n+p}(t) - f_{n+p}(x)}{t-x} \right| =$$

$$= \frac{1}{|t-x|} |f_n(t) - f_{n+p}(t) - (f_n(x) - f_{n+p}(x))| =$$

$$= \frac{1}{|t-x|} |g(t) - g(x)| = \frac{1}{|t-x|} |g'(t)| |t-x| =$$

$$= |g'(t)| < \varepsilon, \text{ где } \uparrow \text{ т. Лагранжа}$$

Прим. (нон. дифр. функции ряда)

Пусть $\forall n$ $u_n(x)$ диф-на на $[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \text{ сход. равн. на } [a, b],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ сход. хотя бы в } \exists \tau \in [a, b]$$

Тогда: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ эк. равн. на $[a, b]$

$$2) \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), x \in [a, b]$$

Следствие Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n имеет непрерывную на $[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$. Тогда

f имеет непрерывную на $[a, b]$

Более того, если Φ_n - непрер. f_n

$$\Phi_n(x_0) = 0 \text{ в нек. } x_0 \in [a, b], \text{ то}$$

$$\Phi_n \xrightarrow{[a, b]} \Phi - \text{непрер. } f$$

$$\text{Д-во } \{\Phi_n(x)\} \text{ эк. в т. } x_0 \in [a, b]$$

$$\{\Phi'_n(x)\} = \{f'_n(x)\} \xrightarrow{[a, b]} \Rightarrow \text{но т. 0}$$

$$\Phi_n(x) \xrightarrow{[a, b]} \Phi \leftarrow \text{диф-на и}$$

$$\Phi'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x), \text{ где}$$

Для предв. аналогично.

Полная интегрируемость нон. и предв.

Пример Функции не рав. на $[0, 1]$

$$\{z_n\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

$$u_n(x) = \begin{cases} 1, & x = z_n \\ 0, & x \neq z_n \end{cases} \quad \forall n \quad \int_0^1 u_n(x) dx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рац.} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \leftarrow \text{Ф-ция Дирихле, не интегрируема.}$$

Теорема о ~~непрерывности~~ ^{интегрируемости} функции по Коши.

Пусть $\forall n, f_n \in R[a, b]$, $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$. Тогда

1) $f \in R[a, b]$ (интегрируемая)

2) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$

(или же $\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$)

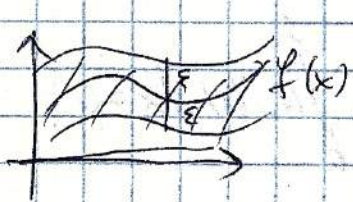
Доказ. 1) Покажем, что а) f о.р. на $[a, b]$

б) $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau$ -разд. $[a, b] : S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$
(сумма Дарбу, критерий интегрируемости)

$\varepsilon = 1 \exists N : |f(x) - f_N(x)| < 1, x \in [a, b]$

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |f_N(x)| \leq 1 + M = M$ о.р.

$f_N \in R[a, b] \Rightarrow$ о.р. $\Rightarrow \exists M : |f_N(x)| \leq M, x \in [a, b]$



$f_n \xrightarrow{[a, b]} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 :$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, x \in [a, b]$
 $n \geq N_1$

Зафикс. $n = N_1 \forall \tau$ (разделение)

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$

$M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, M'_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f_n, m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f$

$m'_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f_n$

$S_\tau(f) = \sum_{j=1}^k M_j \Delta x_j, S_\tau(f_n) = \sum_{j=1}^k M'_j \Delta x_j$

$s_\tau(f) = \sum_{j=1}^k m_j \Delta x_j, s_\tau(f_n) = \sum_{j=1}^k m'_j \Delta x_j$

$\forall [x_{j-1}, x_j] \ni x$

$\underbrace{f_n(x)}_{M'_j} - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < \underbrace{f_n(x)}_{M'_j} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$m'_j - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < M'_j + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$\Rightarrow \begin{cases} M_j \leq M'_j + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \\ m_j \geq m'_j - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \end{cases}$

$\Rightarrow M_j - m_j \leq M'_j - m'_j + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$S_T^*(f) - S_T(f) = \sum_{j=1}^k (M_j - m_j) \Delta x_j \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^k (M_j^* - m_j^* + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}) \Delta x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^k (M_j^* - m_j^*) \Delta x_j + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^k \Delta x_j \leq$$

$$\leq \underbrace{S_T^*(f_n) - S_T(f_n)}_{\substack{\varepsilon/2 \text{ по утверждению} \\ \text{предыдущее}}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Так $f_n \in R[a, b] \Rightarrow \exists \tau: S_T^*(f_n) - S_T(f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$
 Возьмем $\tau = \tilde{\tau}$, получим следующее.

$$S_T^*(f) - S_T(f) < \varepsilon \Rightarrow f \in R[a, b]$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \forall x \in [a, b]$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

что

III. о норм. унк. функц. ряда. Пусть $u_n \in R[a, b]$,
 $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a, b]} S(x)$ Тогда!

$$1) S'(x) \in R[a, b]$$

$$2) \int_a^b S'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n'(x) dx$$

$$(\text{т.е. } \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx)$$

Сх. в среднем

Опр $\{f_n\}$, $f \in R[a, b]$. Тогда

$\{f_n\}$ сходится в среднем на $[a, b]$, если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0$$

Ул. 1 Если $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$, $f_n \in R[a, b]$, то

$\{f_n(x)\}$ сх. в среднем

Доказ. $f \in R[a, b]$, то по с. о. унк. утвержд.
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in [a, b]$

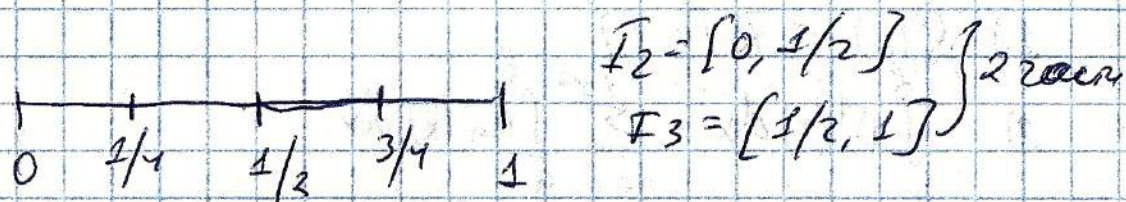
$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$$

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

(41)

Замечание. Пусть χ_n — ч. ф. на $[0, 1]$ и $\chi_n \rightarrow 0$ в L^1 и $\chi_n \rightarrow 0$ в L^2 .

Пр-р $I_1 = [0, 1]$ 1 раз



$I_4 = [0, 1/4]$ $I_7 = [3/4, 1]$ 4 раз

$I_{2^{n-1}} = [0, \frac{1}{2^{n-1}}]$ $I_{2^n-1} = [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1]$
 2^{n-1} раз

χ_n на каждом χ_n дает χ_n на $[0, 1]$

$\forall N \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 > N$
 $\forall x \in [0, 1]$

$x \in I_{n_1}, x \notin I_{n_2}$

$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus I_n \end{cases}$

$\forall x \in [0, 1] \{f_n(x)\}$ расходится

$f(x) \equiv 0$. Показываем, что сход. в L^1 .

$$\int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int_0^1 f_n^2(x) dx = |I_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\downarrow$
 χ_n

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$ ч. ф. к 0 на $[0, 1]$

Кр-ло Коши-Буняковского

$\psi, \varphi \in R[a, b] \Rightarrow$

$$\left| \int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b \psi^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) dx}$$

Д-ло: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \int_a^b (\lambda \psi(x) + \varphi(x))^2 dx \geq 0$

$$\lambda^2 \int_a^b \psi^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx + \int_a^b \varphi^2(x) dx \geq 0$$

$$\left(\int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx \right)^2 - \int_a^b \psi^2(x) dx \int_a^b \varphi^2(x) dx \leq 0$$

Лемма 2 Если $\{f_n(x)\}$ ч. ф. к $f(x)$ на $[a, b] \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Д-ло можно $\int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx =$

$$= \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\leq \int_a^b \chi(x) dx, \chi = |f_n(x) - f(x)|, \psi = 1$$

(42)

$$\leq \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx} \sqrt{\int_a^b dx} =$$

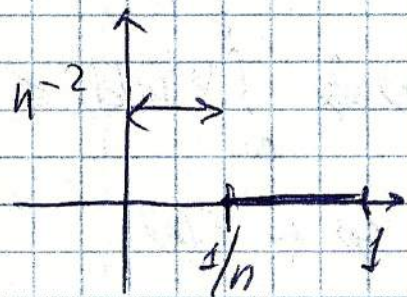
$$= \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx} \cdot (b-a) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$$

$\downarrow$
 const

$\downarrow$
 у к б ср.

Пример 2

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus (0, \frac{1}{n}) \end{cases}$$



$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

$$\sup_{[0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

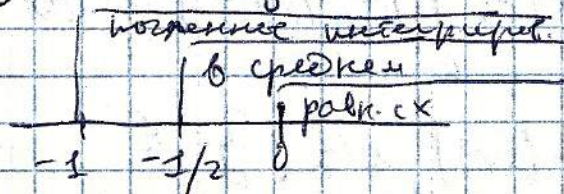
$\forall \epsilon > 0$

$$\int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int_0^{1/n} \frac{1}{n^4} dx = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^5} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\alpha > -1/2$

$$\int_0^{1/n} f_n(x) dx = \int_0^{1/n} \frac{1}{n^2} dx = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \int_0^1 f(x) dx$$

$\alpha > -1$



$$\{f_n\}, f \in R[a, b] \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \\ \textcircled{1} \text{ монотонно к } f \end{array} \right.$$

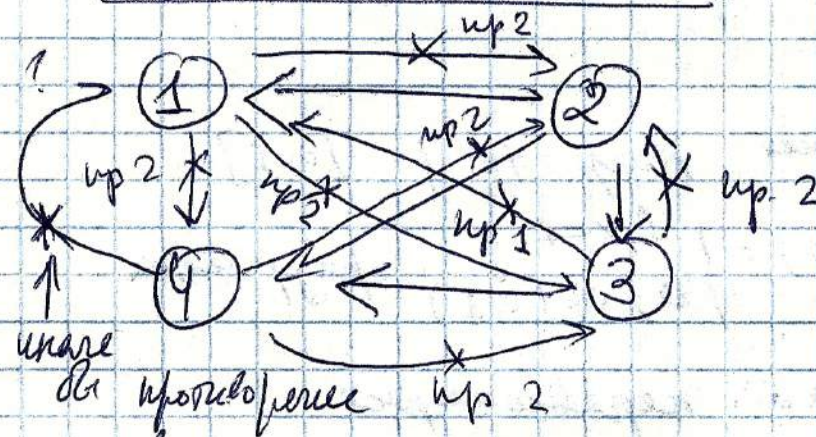
$$f_n \rightarrow f(x) \quad \textcircled{2} \text{ полн. к}$$

$[a, b]$

$$\{f_n\} \text{ к б срдкем } \textcircled{3} \text{ к } f(x) \text{ на } [a, b]$$

$$\text{Теорема Лебега} \quad \textcircled{4}$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$$



теорема Лебега

Если $\{f_n(x)\}$ к б срдкем на $[a, b]$, то $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

Докажем, что $\{f_n\}$ к б срдкем к f

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$$

$$\int_a^b |f_n(x)| dx \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx + \int_a^b |f(x)| dx \leq$$

④

$$\leq \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx} + \int_a^b |f(x)| dx$$

$\downarrow$
 $0, n \rightarrow \infty, \text{ сур.}$

$\underbrace{\int_a^b |f(x)| dx}_{\text{const}} - \text{ср.}$

мощ
ср.
ср.

Л. Больцано-Вейерштрасс

$\{a_n\}$ - сур. $\Rightarrow \exists \{a_{n_k}\}$ - сход.

сущ
мощ
ср.
ср.

? $\{f_n(x)\}$ - равн. сур. $\Rightarrow \{f_{n_k}(x)\}$ с. равн.

~~Болцано-Вейерштрасс~~

Болцано-Вейерштрасс. Пар $\{x^n\}$ $[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x \in [0, 1) \end{cases} - \text{разрешена}$$

$\Rightarrow$ мощ-но сход. неравномерно

$\forall n_k \rightarrow \infty \quad x^{n_k} \rightarrow f(x)$ - разр. $\Rightarrow \{x^{n_k}\}$ с. неравн.

Опр $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно сур.

на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$\forall x', x'' \in [a, b], \rho(x', x'') < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

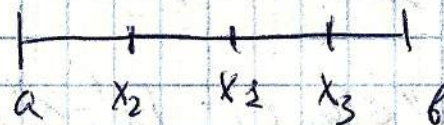
$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

Л. Арцелла ф-ва $\{f_n(x)\}$ равн. сур. и
равномерно сур. на $[a, b]$

из них можно выд. равн. сход.
подпослед. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$

Д-во: 1) По сур. $\{x_n\} \in C[a, b], \forall \delta > 0$
 $\exists N(\delta): \forall x \in [a, b]$

$$\exists j \in \{1, \dots, N\}: |x - x_j| < \delta$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$


$$x_4, \dots, x_7 \quad \delta = 2^{-3} \text{ разово}$$

$$n\text{-тый шаг} \quad x_{2^{n-1}} - x_{2^{n-1}-1}$$

$\delta = \frac{a-b}{2^n} < \delta \Rightarrow N = 2^k - 1$ тогда $x_1, \dots, x_N$
делит $[a, b]$ на 2^N равн. отрезков $< \delta$

2) Группы $\{f_{n_k}\}$ с. в мод x_j

$x_1: \{f_n(x_1)\}$ сур. мощ. $\Rightarrow \exists f_{n_k}(x_1)$ - сход.

$x_2: \{f_n(x_2)\}$ сур. мощ. $\Rightarrow \exists f_{n_k}(x_2)$ - сход.
и т.д.

$$\begin{matrix} f_{n_1}(x) & f_{n_2}(x) & \dots & f_{n_k}(x) & \dots & f_{n_{k_2}}(x) & \dots & f_{n_{k_{k_2}}}(x) \\ f_{n_1}(x) & f_{n_2}(x) & & f_{n_2}(x) & & f_{n_2}(x) & & f_{n_2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n_1}(x) & & & f_{n_1}(x) & & f_{n_1}(x) & & f_{n_1}(x) \end{matrix}$$

с. в $x_1, \dots, x_{k_2}$

diag. подпослед. - подпослед. мощ.
последовательности мощ.

(44)

$\{f_k(x)\}$ - зам., к. $\forall x_j, j \in \mathbb{N}$

$$3) f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} g_k(x) \Rightarrow \{g_k(x)\}$$

Покажем, что подпослед. $\{g_k(x)\}$ к. равн. на $[a, b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [a, b] : |x' - x''| < \delta$$

$$\forall k |g_k(x') - g_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists N \forall x \in [a, b] \exists x_j, j \in \{1, \dots, N\} |x - x_j| < \delta$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} |g_n(x) - g_{n+p}(x)| \leq$$

$$\leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_{n+p}(x_j)| +$$

$$\forall x \sim x_j \frac{\varepsilon}{3} + |g_{n+p}(x_j) - g_{n+p}(x)| <$$

(равн. непрерыв.)

$$\frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + |g_n(x_j) - g_{n+p}(x_j)|$$

Критерий Коши к. $\{g_n(x_j)\}$ $j = 1, \dots, N$

$$\exists \tilde{N}_j : \forall n \geq \tilde{N}_j \forall p \in \mathbb{N} |g_n(x_j) - g_{n+p}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

конечное число j

$$\text{выберем } \tilde{N} = \max(\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_N)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \tilde{N} \forall j \in \{1, \dots, N\}$$

$$\Rightarrow (*) < \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{N}$$

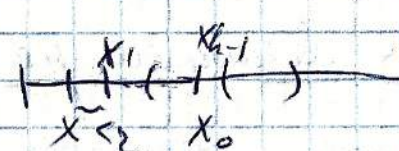
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\forall x \in [a, b] |g_n(x) - g_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

Замечание: Если $\{f_n(x)\}$ равност. непрерыв. на $[a, b]$ и, кроме того, сгр. хотя бы в 1 т. $[a, b] \Rightarrow \{f_n(x)\}$ равност. сгр.

$$\text{Д-во } \varepsilon = 1 \exists \delta : \forall x', x'' \in [a, b], \rho(x', x'') < \delta$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon = 1$$



$$k: |b-a|/k < \delta$$

$\forall x \in [a, b]$ делим на k од. частей отрезок

$$x_1, \dots, x_{k-1}$$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_1)| +$$

$$+ |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + \dots + |f_n(x_{k-1}) - f_n(x_0)|$$

$$< k$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| < k + |f_n(x_0)| \quad \forall n$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq M + k$$

(95)

Для проверки св-ва равномерности непрерыв. свед. св-во:

Лемма: Если $f(x)$ дифф. на $[a, b]$ и крив. из一族 $\{f_n'(x)\}$ равност. сгр. на $[a, b]$ то $\{f_n(x)\}$ равност. непрерыв. на $[a, b]$

$$|f_n'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

До-во $f_n(x') - f_n(x'') = f_n'(\xi)(x' - x'')$
 ξ между x' и x'' (зависит от n)

$\Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \leq M \cdot |x' - x''| < M\delta = \varepsilon$
 равенств. непрерыв.

§4. Степенные ряды

Определение степенного ряда и обл. его сходимости.

① Опре. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ — функция ряда (*)

$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — рядовые числа,
 коэф. степен. ряда

Степ. ряд всегда сход. при $x=0$
 естественно рассм. такие общие степ. ряды

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, x_0 \in \mathbb{R}$

Рассм. мн-во:

$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ окр. снизу 0

Ограничено ли сверху?

Если да, то $L = \sup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Если нет, то $L = \infty$

Теорема (Коши, Даламбер)

I Если $L = \infty$, то ряд (*) сход. только
 при $x=0$

II Если $L \in (0, +\infty)$ то (*) сход. абс.
 при $x: |x| < 1/L$ и расходится при $x: |x| > 1/L$

При $= 1/L$ не ясно

III Если $L = 0$, то (*) сход. абс. при
 всех $x \in \mathbb{R}$

До-во: I. Рассм. $|a_n x^n| = |a_n| |x|^n$

$\sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\text{неогр. функ.}} \underbrace{|x|}_{\text{огр.}}$

Если $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n \in \mathbb{N}}$ неогр. то по лемме $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|x|}$ ^{верно для}
 бесконечного числа значений $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| |x|^n \neq 0$

$\Rightarrow$ не выпол. некрит. усл. сходимости.

$\Rightarrow$ ряд расх. при $x \neq 0$ (при $x=0$ сход.)

II. Рассм. функ. $x: |x| < 1/L$

Введем такое $\varepsilon > 0$:

$|x| < \frac{1}{L+\varepsilon}$

$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Далее $L+\varepsilon/2$ конечное число членов.

(46)

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon/2$ будет вон. начиная с нек. номера $n \geq n_0$

$\forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \varepsilon/2}{L + \varepsilon} < 1$

$\Rightarrow$ (4) сход. по признаку Коши. $1/L - \varepsilon$

Рассм. $\forall x \quad |x| > \frac{1}{L}$



Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| > \frac{1}{L - \varepsilon}$

Д.к. L -пред. п. по пер-ло

$\sqrt[n]{|a_n|} > L - \varepsilon$ вон. для беск. числа n .

$\sqrt[n]{|a_n|} |x| > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1 \Rightarrow$ не вон. неост. усл. с-ра $\Rightarrow$ ряд (4) расх.

(III) $L = 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. рассм. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon \leftarrow \text{выберем } \varepsilon = \frac{1}{2|x|}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} |x| < \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ по признаку Коши ряд сходится

Зам: Если (4) сход. не только при $x=0$, то мнб его абл. с-р. — это вся числовая ось (см. IV), мнб его абл. с-р. содержит интервал $(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$, причем границы этого интервала нельзя увеличить

Ряды $R = 1/L$ (II) $R = \infty$ (III) $R = 0$ (IV) коэф. радиусом сход. с-р. ряда

и $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ Фра Коши-Адамара сход. ряда

Зам. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, (-1, 1), R=1$

При $x = \pm 1$ — расх. ряд.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1, 1), R=1$ $x=1$ — расх. $x=-1$ — расх. с-р.

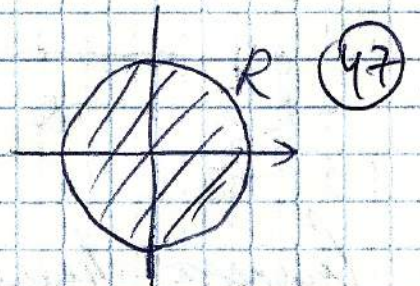
3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad (-1, 1), R=1$ $x = \pm 1$ — сход.

Зам. Рассм. так же с-р. ряды с коэф. $a_n \in \mathbb{C}$, угугаясь вопрос о сходимости при $z \in \mathbb{C}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

~~В этом~~

В этом случае: $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \rightsquigarrow z: |z| < R$



② Функция св-ва сеп. редов

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ — определена на } -R < x < R$$

$$(R > 0) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n \text{ — тот же радиус сходимости}$$

Лемма 1 Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда и $z > 0: z < R$. Тогда степенной ряд $f(x)$ равномерно сходится на мн-ве $[-z, z]$

Д-во: $|a_n x^n| \leq |a_n| z^n$
 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| z^n$ сходится

$\Rightarrow$ По признаку Вейерштрасса

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| x^n \text{ сход. равн. на } [-z, z]$$

Теорема 2 Сумма степенного ряда явл. непрерывной на $(-R, R)$ функцией.

Д-во: непрерывна на мн-ве $(-R, R) \Leftrightarrow$ непрерывна в каждом $\tau \in (-R, R)$

Рассм. $\tau < R$:
 $x_0 \in (-z, z)$

Согласно Лемме 1, ряд $(*)$ сход. равн. на $[-z, z]$

$f(x)$ непрерывна на $[-z, z] \Rightarrow$ и в т. x_0 , т.е.

Теорема 3 Степенной ряд $(*)$ можно почленно интегрировать на $[0, x]$, причем получающийся ряд сеп. ред имеет тот же радиус сходимости.

Д-во. Ряд $(*)$ равн. сход. на $\forall [0, z]$ где $0 < z < R$.

$\Rightarrow$ Возможно почленное интегрирование

$$\begin{aligned} \int_0^z f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^z x^n dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} \frac{z^m}{m} \end{aligned}$$

$\tilde{a}_m = \frac{a_{m-1}}{m}$

$$\begin{aligned} L &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|\tilde{a}_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{|a_{m-1}|}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_{m-1}|} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_{m-1}|} = L \end{aligned}$$

Теорема 4 Сумма сеп. ряда $(*)$ явл. функцией дифференцируемой на $(-R, R)$; если ряд $(*)$ допускает почленное дифференцирование, причем получающийся ряд имеет тот же радиус сходимости.

Д-во: $\sum u_n(x) : \sum u_n(x_0) \Leftrightarrow \sum u'_n(x) =$ (98)
 равн. сход.

Рассм. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$ (99)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = L$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1 \Rightarrow$ (4) имеет тот же радиус сходимости.

Дифф-ва $f'(x)$ на $(-R, R) \Leftrightarrow$ диф-ва в $\forall x_0 \in (-R, R)$

на $[-r, r]$ сген. ряд (4) и сген. ряд (4) сход. равн.

$\Rightarrow$ возможно почленное дифф-ие.
 $f'(x)$ дифф-на на $[-r, r]$

Следствие 0.4 Сумма сген. ряда явл. бесконечно дифф-аб функцией на $(-R, R)$
 т.е. ряд (4) можно почленно дифф-и
 около любого иного рау.

$$f'(x) \in C^\infty(-R, R)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ?$$

③ Разложение ф-ции в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv f'(x), \text{ радиус сходимости } 0 < R \leq +\infty$$

$$\Rightarrow f(x) \in C^\infty(-R, R)$$

Теор. 1 Если ф-ция $y = f(x)$ разложима в степенной ряд в обл. $(-R, R)$, то $f(x) \in C^\infty(-R, R)$
[Необходимое условие]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f(0) = a_0 \text{ (совокупление)}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}, f'(0) = a_1 \cdot 1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}, f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$$

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (\Rightarrow \text{однозначность разложения})$$

В этом случае степенной ряд определяется однозначно, при этом его коэффициенты считаются по ф-ле

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{ряд Тейлора ф-ции } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Замечание указанное в т. 1 усл. не явл. достаточным.

Пример 0.Качи

(Ф-ция ∞ диф-на, но неразложима в сген. ряд)

(40)

рассм. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Если эту ф-цию можно разложить в степен. ряд то этот ряд должен быть только рядом Тейлора.

Неспр. ф-ция. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$

$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2} - 0}{h} =$

$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h=a}} \frac{a}{e^{1/a^2}} = 0$

$f'(x) = e^{-1/x^2} (-2)x^{-3} = 2x^{-3} e^{-1/x^2}$

$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^{-3} e^{-1/h^2} - 0}{h} =$

$= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{e^{1/h^2}} = 2 \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ \text{показат.}}} \frac{a^4}{e^{a^2}} = 0$

$\frac{1}{h} = a$

$f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

но $f^{(k)}(0) = 0, k = 1, 2, \dots, \infty$

у этого ряда все коэф = 0

$\neq f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \Rightarrow \neq$

40) Разложение нек. зн. ф-ции в ряд Тейлора

1) $f(x) = e^x$

Фра Тейлора: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x);$

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, |\xi| \in (0, x)$

При $|x| < r \Rightarrow |\xi| < r \Rightarrow$

$\Rightarrow |R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^r}{(n+1)!} r^{n+1}$

$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Остаток: $e^x - S_n(x) = R_{n+1}(x)$

$\Rightarrow |e^x - S_n(x)| \leq \frac{e^r}{(n+1)!} r^{n+1}$

$\lim_{N \rightarrow \infty} |e^x - S_N(x)| = 0 \quad \forall x \quad |x| \leq r$

2) $f(x) = \cos x: \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

$+ \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+2}(x)$

50

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} |x|^{2n+2} \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

for all $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3) $f(x) = \sin x$: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$+ R_{2n+3}(x)$$

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)!} |x|^{2n+3} \quad \forall x, |x| \leq 2$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4) $y = \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(x)$$

Если $x \in (0, 1)$, то

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

{направлено}

Если $x \in (-1, 0)$, то $x \in [-2, 0)$, $t \in (0, 1)$

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{1-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

{конвергент}

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

5) $y = (1+x)^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$$

Если $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ряд упрощается
 $\Rightarrow$ биномиальное разложение

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} (1-\theta)^n$$

{конвергент}

$$\theta < 1 \Rightarrow 0 < \xi = \theta x < x$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n) \cdot (1+x)^{\alpha-n-1}$$

$$\Rightarrow R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n) (1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!} x^{n+1} (1-\theta)^n$$

$$= \underbrace{\left(\frac{(1-\theta)}{(1+\theta x)} \right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} < 1} \cdot \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n!} x^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \cdot \underbrace{(1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot x \cdot \alpha}_{\text{ограничена}}$$

$\theta = \theta(n) \nearrow$
 $1+\theta x \leq 1+|x|$

$$\begin{aligned} (1-\theta) &< 1 \\ (1+\theta x) &> 0 \\ -1 &< x < 1 \\ -1 &< \theta x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &< \theta < 1+\theta x \\ \theta(1+x) &> 0 \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) (1+x)^{\alpha-n}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$$

$$a_n x^n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

51

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

Если он сход $\Rightarrow$ каждый член $\rightarrow 0$ (необязат. сход)
 $\forall x \in (-1, 1)$

Покажем сходимость с помощью Даламбера

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(\alpha-1) \dots (\alpha-n) \cancel{(\alpha-n-1)} x^{n+1}}{(\alpha-1) \dots (\alpha-n) \cancel{x^n}} = \frac{(\alpha-n-1)x}{n+1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1}}{p_n} \right| = |x| \in [0, 1) \Rightarrow$$

а) по Даламберу ряд сходится $\Rightarrow$ 2-е

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

б) $y = \arctg x$; $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

разложим в ряд Тейлора, а
 потом проинтегрируем

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$0 \leq x^2 \leq 1$
 $(-1 < x < 1)$ $|a_n| = \begin{cases} 1, & n \text{ чет} \\ 0, & n \text{ нечет} \end{cases}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1/1 = 1$$

(т.к. верхний!)

$$\arctg t = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \int_0^t x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

$\forall t \in (-1, 1)$

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$+ (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (-1 < x < 1)$

Замечание

а) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ z -компл.

б) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$

в) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$\forall$ радиус $R = \infty$

а) Замена: $z \rightarrow iz$

$$\Rightarrow e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

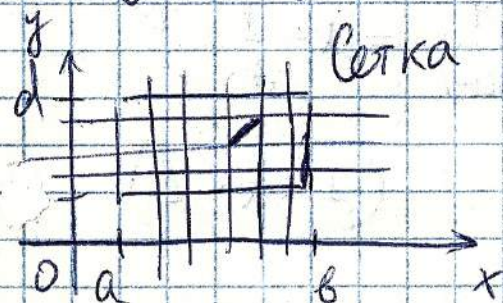
$\cos z$ $\sin z$

(52)

$$\Rightarrow e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{Ф.н. Эйлера}$$

Глава IV Интегрирование функций нескольких переменных

§3 Двойной интеграл: определение и усл. существования



$$R = [a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leq x \leq x_k] \times [y_{l-1} \leq y \leq y_l] \Rightarrow$$

разбиение T прямоуг. R

$$\Delta_{kl} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \Delta y_l = y_l - y_{l-1}$$

$$\Delta = \max_{k,l} \Delta_{kl} - \text{диаметр разбиения } T$$

В каждом R_{kl} выберем $M_{kl}(\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$

$$\sum_{k,l} f(\xi_k, \eta_l) \underbrace{\Delta x_k \Delta y_l}_{\text{площадь } \Delta R_{kl}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}(f) - \text{интегральная сумма}$$

$f(x,y)$ задана на R

Опр Интегральная сумма $\mathcal{G}(f)$ существует тогда и только тогда, когда
 $\rightarrow 0$, если $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$
 $\forall T$: диаметр $\Delta < \delta$, $\forall$ разбиение M_{kl} :

$$|\mathcal{G}(f) - I| < \varepsilon$$

Опр Если для интегр. суммы $\mathcal{G}$, то $f(x,y)$ интегрируема на R (по Риману)

$$\text{и тогда } I = \iint_R f(x,y) dx dy = \mathcal{G}(f)$$

Подход Дарбу Пусть $f(x,y)$ задана на R и T -разбиение

Зам: Аналогично определенному интегралу Римана на опр, подход только что определен можно дать, что если $f(x,y)$ интегр. на R , то $f(x,y)$ опр. (Дарбу!)

$$\text{Пусть } R_{kl}: m_{kl} \equiv \inf_{(x,y) \in R_{kl}} f(x,y);$$

$$M_{kl} \equiv \sup_{(x,y) \in R_{kl}} f(x,y)$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}^-(f) = \sum_{k,l} m_{kl} \underbrace{\Delta R_{kl}}_{\text{площадь прямоуг.}}, \quad \mathcal{S}(f) = \sum_{k,l} m_{kl} \Delta R_{kl}$$

↑
верхняя граница Дарбу минимальная граница Дарбу

Св-ва сумм Дарбу (для непрерывных)

$$1) \forall f(x,y) \forall T \quad s(f) \leq \sigma(f) \leq S(f)$$

$$2) \forall T \forall \varepsilon > 0 \exists (\xi_k, \eta_k) \in R_k \forall k, l$$

$$0 \leq \sigma(f) - s(f) < \varepsilon \quad (s(f) = s(f, T))$$

$$0 \leq S(f) - \sigma(f) < \varepsilon \quad (\sigma(f) = \sigma(f, T), (\xi_k, \eta_k))$$

3) $\forall T$ если $\hat{T}$ получено из T добавлением прямых разделения, то

$$\hat{s}(f) \geq s(f) \quad \hat{S}(f) \leq S(f)$$

4) Если T' и T'' — разб. R , то
~~любая~~ минимальная сумма $s'(f) \leq$
~~любая~~ верхняя сумма $S''(f)$

5) Сл-во всех минимальных сумм Дарбу
 орг. сверху. всех верхних — снизу

$$\Rightarrow \exists \sup_T s(f) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{I}; \exists \inf_T S(f) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{I}$$

миним. интеграл Дарбу верхний инт. Дарбу

6) Если разб. T' получено из разб. T добавлением N прямых, то выполняются

$$0 \leq S'(f) - s(f) \leq \left\{ \begin{array}{l} (\sup_R f - \inf_R f) \cdot \\ \sqrt{(b-a)^2 + (c-d)^2} \cdot N \cdot \Delta \end{array} \right.$$

Δ — диаметр T

7) (Интервал Дарбу как предел верх/нижних инт. сумм при $\Delta \rightarrow 0$)

$$\underline{I} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s(f), \text{ г.е. } \forall \varepsilon > 0 \forall T \subset \text{диаг.}$$

$$\Delta < \delta \quad 0 \leq \underline{I} - s(f) < \varepsilon$$

$$\bar{I} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S(f) \quad \dots \quad 0 \leq S(f) - \bar{I} < \varepsilon$$

Теор 1 (критерий интегрируемости Дарбу)

Функция $f(x,y)$ на R интегрир. $\Leftrightarrow \underline{I} = \bar{I}$

г.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разб. $T: |S'(f) - s(f)| < \varepsilon$

(Вариантно)

Теор 2 любая непрерывная на R $f(x,y)$ интегрир. на нем

Дл-во: Если ф-ция $f(x,y)$ непрерывна на R и ~~она всюду равна нулю~~, то она орг. на R и она вкл. разб. непрерывна на R , то

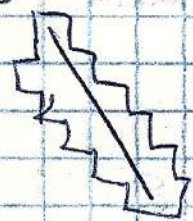
Орг. орг. на R ф-ция $f(x,y)$ обладает I -св-вом, если для любых ε можно найти ее разб. (Q) такое, что $\forall \varepsilon > 0 \exists$ простейшая многогр. фигура M : $M \supset Q$ и ее площадь $< \varepsilon$

Простейш. многогр. фиг. = многогр. в осях координат. // одна из осей координат



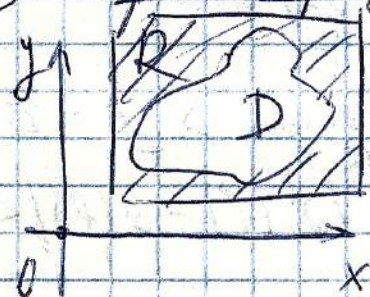
(54)

Справедливая кривая имеет площадь
нуль, ее $\exists$ произ. мнор. ф-ца, ее содержащая



Теор 3 Если $f(x,y)$ обладает
 Γ -св-вом, то она мнр. на R

2° Справ. произ. имеет



D -область, огранич.

$\Gamma = \partial D$ имеет площадь
нуль

на D задана ф-ца

на D задана $f(x,y)$. Расем. под. прямоуго.

$$R = [a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]$$

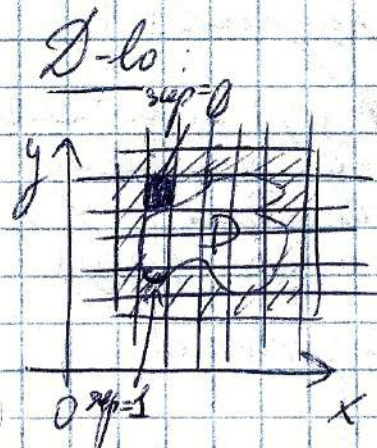
~~$D \subset R$~~ $D \subset R$. Построим новую функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Определение (*) Ф-ца $f(x,y)$ на Γ мнр.
в D или продолженная ф-ца $F(x,y)$
мнр. на R

$$\iint_D f(x,y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_R F(x,y) dx dy$$

Теорема 4 $\iint_D 1 dx dy = \text{площадь } D$



Верхний мнр. сумма
в D $\Delta R_k l$ $f(x,y) \equiv 1$

$$S^+(f) = \sum \Delta R_k l = \text{площадь } D$$

многоугр. ф-ца, кот. содержит D , ее D
вмещает в эту ф-ца

$$S^-(f) = \sum \Delta R_k l = \text{мнр. многоугр. ф-ца,}$$

кот. вмещает в D .

Пк. D -измерима, то $S^-(f) \leq \text{площадь } D \leq S^+(f)$

Теор 5 1) Если $f(x,y)$ мнр. в D , то
 $f(x,y)$ интегр. в D

2) Если $f(x,y)$ обладает Γ -св-вом в D ,
то она интегр. в D .

Аналогично, дополнение функции

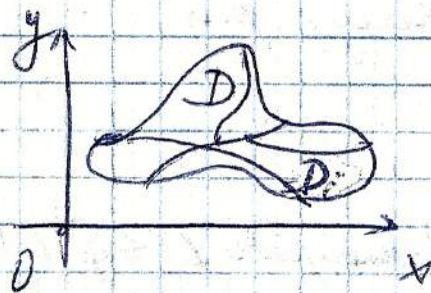
Зам. Даже если $f(x,y)$ мнр. в D ,
ф-ца $F(x,y)$, опр. по мнр. f в $R \supset D$
может иметь разрыв на Γ (границе)
по т. Γ имеет площадь 0, то $F(x,y)$
будет обладать Γ -св-вом в R 55

Свойства 1) Ф-ция $f(x,y)$ имт. в D ,
если она имеет в D конечное число
точек разрыва и/или конечное число
прямых или кривых разрыва

2) Если орг. ф-ция в D $g(x,y)$ отличается
от $f(x,y)$ только на нулевой площади
(а в остальном везде совпадает с f),
то из интегр. $f(x,y) \Rightarrow$ интегр. $g(x,y)$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D g(x,y) dx dy$$

3) Определение Классическое интегр. с пом.
прямых разбиений



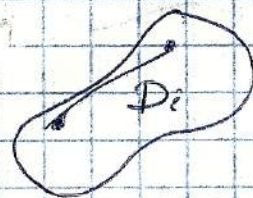
D - орг. обл.
с границей Γ
площади 0 .
на D задана $f(x,y)$

Рассм. в D конечное число прямых или
кривых.
И пусть эти кривые разбивают D на
конечное число областей D_i внутренних
точек пересечения

$$D = \bigcup_{i=1}^m D_i$$

Вн. ∂D_i - спрямленное кривое $\Rightarrow$
(граница)
 D_i - квадрируемое: $d_i = |\partial D_i|$

П.к. D_i ограничена, то $\exists \sup_{M,N \in D_i} \rho(M,N) = \Delta_i$ -
диаметр $D_i \Rightarrow$



$$\max_i \Delta_i = \Delta - \text{диаметр разбиения}$$

(*) Орг. интегр. суммой для $f(x,y)$, соотв.
таблицы разбиения $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$ называют

$$Z(f) = \sum_{i=1}^m f(M_i) d_i, \text{ где } M_i \in D_i \text{ (точка)}$$

Число I называют пределом
 $Z(f)$ при $\Delta \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $\forall$ разб. $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$ диаметр $\Delta < \delta$ и

любого выбора точек $M_i \in D_i$:

$$|Z(f) - I| < \varepsilon$$

I - интеграл по D от $f(x,y)$

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy$$

Теор. 6 Орг. (4) и (*) эквив., причем
один дает другому пределов интегр.
сумму. знак. по одн. D

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$\xi_1 \quad \xi_2$$

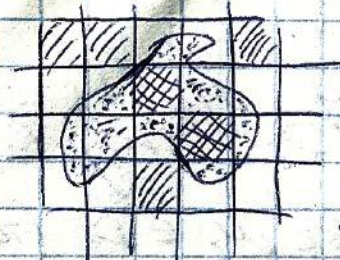
$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$\eta_1 \quad \eta_2$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ многогр. фиг. K площадь $< \varepsilon$
 и такое!

Д-во $(*) \Rightarrow (*)$



$\sigma(f), \bar{\sigma}(f), \bar{\sigma}(f)$

$\square \leftarrow 0$ -ая сумма
 $\square \leftarrow$ увеличен в обл. $\Rightarrow$

такая разбивка обл. на части

$\square \leftarrow$ часть

$\bar{\sigma}(f)$ отличается от $\bar{\sigma}(f)$ (верхней суммы
 для D разбивки самой обл. D) на
 части, в кот. соотв. обл.-ти разбивки
 лишь частично содержится в D

Т.к. ∂D имеет площадь 0 и ф-ция
 (граница обл.)

$f(x, y)$ по вклад этих элементов $\rightarrow 0$
 (по поправкам границы) $\Delta \rightarrow 0$

$$\bar{\sigma}(f) - \bar{\sigma}(f) \leq \bar{\sigma}(f) - \sigma(f) < \varepsilon$$

$$\bar{\sigma}(f) \leq \sigma(f) \leq \bar{\sigma}(f) \quad \text{самая обл.}$$

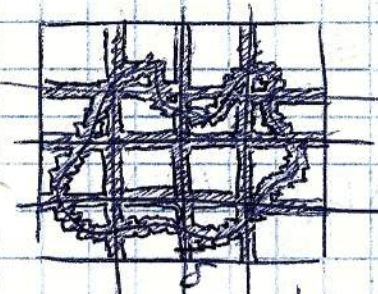
$$\sigma(f) \leq \sigma(f) \leq \bar{\sigma}(f) \quad \text{прямоуголь}$$

$$\bar{\sigma}(f) \leq \sigma(f) + \varepsilon, \quad \bar{\sigma}(f) \leq \sigma(f) + \varepsilon,$$

$$(*) \Rightarrow (*)$$

Рассм. такое разбиение упр-ка $R \supset D$
 прямыми, для кот.

$$\bar{\sigma}(f) - \sigma(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$



$\exists$ многогр. фиг. содержащая
 внутри себя все
 отрезки этой разбивки
 и границу D
 площадь кот. мала, $< \frac{\varepsilon}{6K_0'}$

$$\text{где } K_0 = \sup_D |f(x, y)|$$

$\delta > 0$ - мин. расстояние от линии разб. и
 ∂D до границы этой многогр. фиг.

Рассм. разб. обл. D на иррегул. подобласти
 D_i , $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$, диаметр кот. $< \delta$

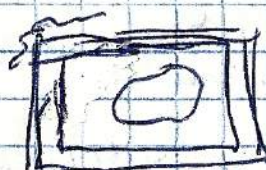
Тогда в подобласти D_i

линь имеет общие
 с линиями
 разбиения и границами
 обл.

линь не имеет
 общих с
 линиями разб.
 и с границ. обл.



линия здесь,
 в силу вклада
 лежит
 внутри многогр.
 фигур



в силу
 многогр. фиг.
 лежит
 внутри
 упр-ка R
 (область, разбиения)

Рассм. в. и н. суммы Рароз, отброс.
разб. $D = \bigcup D_i$

$$\tilde{S}(f) = \sum_i M_i \Delta D_i \quad \bar{S}(f) = \sum_i m_i \Delta D_i$$

$$\varphi(f) = \sum_i \underbrace{M_i}_{\text{выбрана } i: D_i \cap \{\text{линии разб. и } \partial D\}} \Delta D_i + \sum_{\text{ост. } i} m_i \Delta D_i$$

$$\leq \sum_{i: D_i \cap \{\dots\}} M_0 \Delta D_i + \sum_{\text{ост. } i} M_i \Delta D_i \leq$$

$$\leq M_0 \cdot \frac{\varepsilon}{6M_0} + \sum_{\text{ост. } i} M_i \Delta D_i = (**)$$

Рассм. какой-либо нр-к разб. R_k
объединим все $D_i \in R_k$ в одну область
Пусть его площадь (объединения) $= \Delta \tilde{R}_k$

$$\text{Тогда } \sum_{\text{ост. } i} M_i \Delta D_i \leq \sum_k \underbrace{M_k}_{\text{выбрана}} \Delta \tilde{R}_k =$$

$$= \sum_{k \text{ площадь } \tilde{R}_k} M_k \Delta \tilde{R}_k + \sum_k M_k \Delta (R_k \setminus \tilde{R}_k)$$

в эти дополнения
линии в искомой раз.

$$< \sum_k M_k \Delta R_k + M_0 \cdot \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\Rightarrow \tilde{S}(f) < \frac{\varepsilon}{6} + \varphi(f) + \frac{\varepsilon}{6} = \bar{S}(f) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично

$$\bar{S}(f) > \tilde{S}(f) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{\varepsilon/3}{\tilde{S}(f)} \quad I_1 \quad \frac{\varepsilon/3}{\bar{S}(f)}$$

$$\tilde{S}(f) < \varepsilon/2 \tilde{S}(f)$$

I_1, I_2 - интегралы

$$\Rightarrow \tilde{S}(f) - \bar{S}(f) < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ разб. } D = \bigcup D_i$$

$\Rightarrow$ ф-ция $f(x, y)$ интегр. по $(*)$

I_1, I_2 - суммы при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

(§2) Основные св-ва двойных интегралов

① Св-во аддитивности

Пусть обл. D разбита спрямляемой
кривой на 2 части D_1 и D_2 , $D = D_1 \cup D_2$
Если $f(x, y)$ интегр. на D , то $f(x, y)$
интегр. на D_1 и D_2 , при этом

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Дл.о. Рассм. разб. D_1 и D_2 на конечное
число обл., в. и н. суммы одинаковы



$$\tilde{S}_1(f), \bar{S}_1(f), \tilde{S}_2(f), \bar{S}_2(f)$$

Объединение этих разбиений
= разбиение D

(к линиям разб. добавляем
линии, разбивающие D на 2
части)

П.и. на D $f(x, y)$ интегр., то $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists$ разб. малого диаметра

$$0 \leq \tilde{S}(f) - \bar{S}(f) < \varepsilon$$

всех разб. удовлетв.
разделяющая линия

$$\tilde{S}_1(f) + \tilde{S}_2(f) \quad \bar{S}_1(f) + \bar{S}_2(f)$$

(58)

$$0 \leq \underbrace{S_1'(f) - S_1(f)}_{0'} + \underbrace{S_2'(f) - S_2(f)}_{0'} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1'(f) - S_1(f) < \varepsilon \\ S_2'(f) - S_2(f) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \text{ уст. на } D_1 \text{ и на } D_2$$

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D f \, dx \, dy; \quad S(f) \leq I \leq S'(f)$$

$S_1(f) + S_2(f) \quad S_1'(f) + S_2'(f)$

$$I_j \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{D_j} f \, dx \, dy \quad S_j'(f) \leq I_j \leq S_j'(f)$$

$j=1, 2$

$$\Rightarrow S(f) \leq I_1 + I_2 \leq S'(f)$$

$S(f) \leq I \leq S'(f)$

$\Rightarrow S'(f) - S(f) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 0$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2$

Упр. 2 Пусть D разбита на n частей

Если $f(x,y)$ уст. на D , то она уст. на D , при этом

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} f(x,y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x,y) \, dx \, dy$$

D -то рассм. произв. разб. D на n частей

$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$



$S'(f) \rightarrow S_1'(f) + S_2'(f)$

или в тех случаях

где они заданы

$$S'(f) = S_1'(f) + S_2'(f) + \dots$$

или разбита на n частей, тогда при $\Delta \rightarrow 0$

$$S'(f) = S_1'(f) + S_2'(f) + \dots$$

$\iint_{D_1} f \, dx \, dy \quad \iint_{D_2} f \, dx \, dy \quad \dots$

$$\Rightarrow S'(f) \text{ уст. при } \Delta \rightarrow 0$$

Аналогично для

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f) + \dots$$

$$\Rightarrow f \text{ уст. на } D = D_1 \cup D_2$$

2° линейность:

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)) \, dx \, dy =$$

$$= \alpha \iint_D f(x,y) \, dx \, dy + \beta \iint_D g(x,y) \, dx \, dy, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3° интегрируемость произведения

$$\text{Если } f \text{ и } g \text{ уст. на } D \Rightarrow$$

$$fg \text{ уст. на } D$$

4° Усложнение нер-ва

Пусть $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$ и
каждая ф-ция инт. на D
Тогда:

$$\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D g(x,y) dx dy$$

5° Если $f(x,y)$ инт-на на D , то
 $|f(x,y)|$ инт-на на D и

$$\left| \iint_D f dx dy \right| \leq \iint_D |f| dx dy$$

6° Ф-на среднего значения

Пусть $f(x,y)$ и $g(x,y)$ инт. на D и
 $g(x,y) \geq 0$ на D . Тогда $\exists \mu \in \mathbb{R}$:

$$\iint_D f(x,y)g(x,y) dx dy = \mu \iint_D g(x,y) dx dy$$

$$\inf_D f(x,y) \leq \mu \leq \sup_D f(x,y)$$

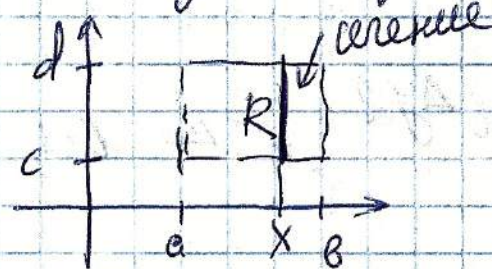
Зам: Если $f(x,y)$ непрерывна в D и
одн. D связна, то для $\mu \in \mathbb{R}$ в св-ве

$$6^\circ \exists (\xi, \eta) \in D \quad \mu = f(\xi, \eta)$$

$$7^\circ \iint_D 1 dx dy = \text{мера } D$$

§3 Сведение двойного интеграла к повторному

1° Случай прямоугольника



$$\iint_R f(x,y) dx dy$$

Теор. 7 Пусть: 1) $f(x,y)$ инт. на R

2) $\forall x \in [a, b] \exists$ интеграл $I(x) = \int_c^d f(x,y) dy$

Тогда $\exists$ повторный интеграл

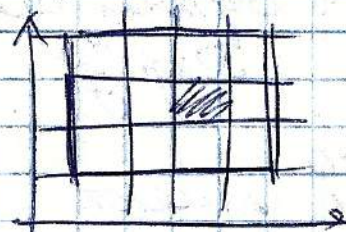
$$\int_a^b I(x) dx = \iint_R f(x,y) dx dy$$

Д-во: Рассм. $\forall$ разбиение T уп-на R :
 $R = \bigcup_{k,l} R_{kl}$

$$\forall R_{kl}: m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x,y)$$

$$M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x,y)$$

$$\forall (x,y) \in R_{kl}: m_{kl} \leq f(x,y) \leq M_{kl}$$



$$R_{kl} = \{x_{k-1} \leq x \leq x_k, y_{l-1} \leq y \leq y_l\} \quad (60)$$

Провести по y в допустимых пределах,

$$f(x,y) \text{ итд-на тн } \exists I(x) = \int_c^d f(x,y) dy$$

$$\{ m_{kl} \leq f(x,y) \leq M_{kl} \}$$

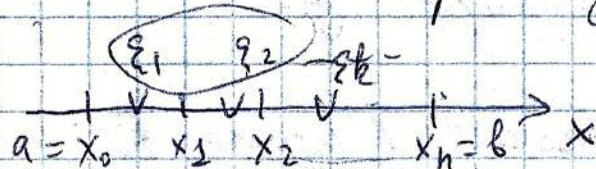
$$m_{kl} \Delta y_l \leq \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x,y) dy \leq M_{kl} \Delta y_l \quad \text{"+" по } l=1, \dots, m$$

Сложим почленно

$$\sum_{l=1}^m m_{kl} \Delta y_l \leq I(x) \leq \sum_{l=1}^m M_{kl} \Delta y_l \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$$

~~$\Rightarrow \sum_{k=1}^n m_{kl} \Delta x_k \leq I(x) \leq \sum_{k=1}^n M_{kl} \Delta x_k$~~

любая промежуточная точка



$$\Rightarrow \sum_{l=1}^m m_{kl} \Delta y_l \leq I(\xi_k) \leq \sum_{l=1}^m M_{kl} \Delta y_l \quad \Delta x_k$$

$\max \Delta x_k \rightarrow 0$ как $\Delta x_k \rightarrow 0$ по k

$$\sum_{k,l} m_{kl} \Delta y_l \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k,l} M_{kl} \Delta y_l \Delta x_k$$

нижняя сумма Дарбу

интегр. сумма по в. итд. Верхняя сумма Дарбу

При диаметре разб $\Delta \rightarrow 0$ нижн. и верхн. суммы имеют общий предел $\rightarrow \iint_R f(x,y) dx dy$

$$\max \{\Delta x_k\} \rightarrow 0, \text{ тн } \max \{\Delta x_k\} \leq \Delta$$

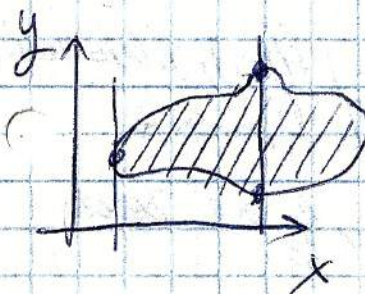
из двойного кр-ла $\Rightarrow$ при $\max \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$ интегр. сумма по в. итд. имеет предел, равный

$$\iint_R f(x,y) dx dy \Rightarrow \text{этот же предел} = \int_a^b I(x) dx, \text{ тд}$$

Замечание: Ф-в f остается справедливой, если в ней поменять ролями переменные x и y

20) Случай произвольной области

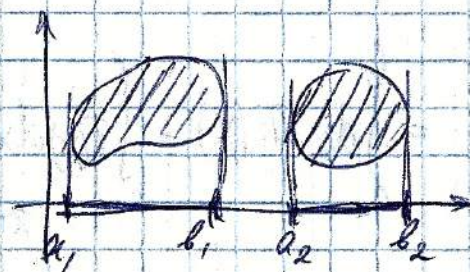
Рассм. произв. обл. D : ограничена и $2D=0$. Кроме того, пусть пересечение границ обл. с любой верт. прямой $x=x_0$ состояло не более, чем из 2 точек.



Для $\forall x$, для кот. такое Δ есть, расем

$$y = y_0(x), y = y_2(x), y_1(x) \leq y_2(x)$$

Для x , для кот. есть Δ , образуют отрезок $[a, b]$



(6)

Теор 8 Пусть в рассматриваемой обл. D задана $f(x,y)$, кот. уст. в D . $\forall x \in [a,b]$ $\exists$ уст. $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$$

Тогда $\exists$ нов. уст. интеграл $\int_a^b I(x) dx = \iint_D f(x,y) dx dy$

Дл. расм. кр-к $R \supset D$ $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\substack{R \\ D}} F(x,y) dx dy \stackrel{17.73}{=} \int_a^b \int_c^d F(x,y) dy dx$$

$$= \int_a^b dx \left(\int_c^d F(x,y) dy \right) (**)$$

$\exists$ для кажд. x , т.к.

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy = I(x) \quad \exists \text{ по уст. т. 17.73, а ост. часть } - \text{ это } 0$$

$$I(x) + 0 = \int_c^d F(x,y) dy$$

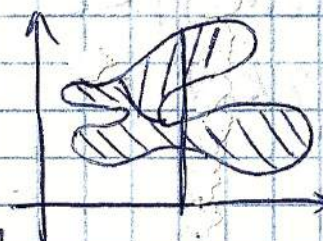
$$(**) = \int_a^b dx \left(\int_c^d F(x,y) dy \right) = \int_a^b dx I(x) = \int_a^b I(x) dx \quad \text{это.}$$

(иначе так $\emptyset$)

Зам 2 Теор 8, верна и в случае, когда x и y меняются ролями

Зам 3 Дл. о.б. D соверш. аналитич. дл. обл. D , у кот. мбод при $x=a$, мбод при $x=b$ пересечение с границей явл. отрезком

Зам 4 Переход к нов. уст. возможен и для более сложных областей



разобьем на 2 части.

$D = D_1 \cup D_2$ и воспользуемся аддитивностью интеграла

И, е можно рассматривать обл. D , явл. объединением конечного числа обл., обладающих в о.б. св-вом

§4 Прямые и n-кратные интегралы

Рассм. $D \in \mathbb{R}^n$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x)$ задана в D

$$\iint_D \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$(x = (x_1, \dots, x_n)) \quad dx_1 \dots dx_n \equiv dx$$

① n-мерный объем

а) объем n-мерного n-многогранника

$$[a_1 \leq x_1 \leq b_1] \times \dots \times [a_n \leq x_n \leq b_n]$$

$$\stackrel{\text{объем}}{=} (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

б) Элементарное n -мерное тело - объединение конечного числа n -мерных Π -многов вида в п. а)

в) Используя аддитивная функ. объема (меры) каждому n -ому n -мерному телу сопоставляется по св-ву.

г) Говорят, что мн-во $D \in \mathbb{R}^n$ имеет объем, если $\forall \varepsilon > 0 \exists K_1 \subset D$ и $K_2 \supset D$ (K_1, K_2 - эл. тела) : $|V(K_2) - V(K_1)| < \varepsilon$
 где V - функ. объема
 Тогда $V(D) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{K_1 \subset D} V(K_1)$
 $\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{K_2 \supset D} V(K_2)$

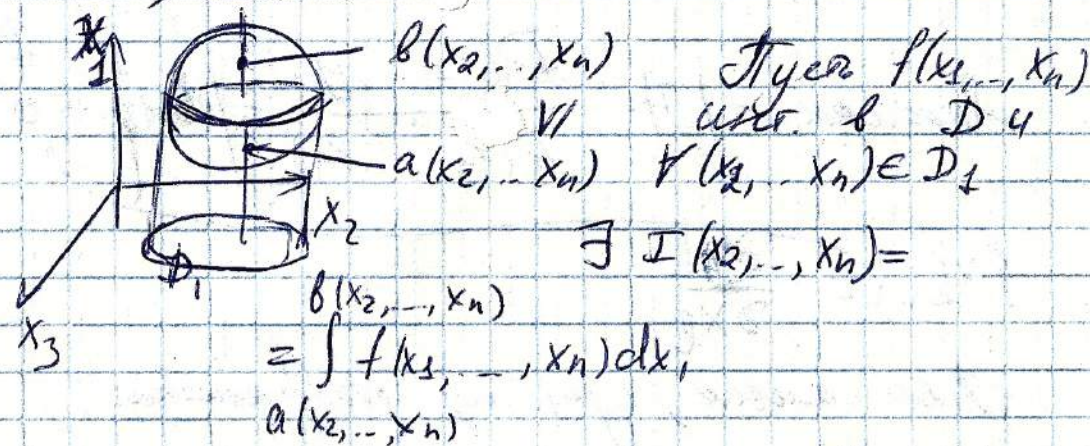
д) рассм. $D = n$ -мерн. Π -много, тогда $\int f(x) dx$ через разбиение D гиперплоскостями на элементарные Π -много и переходим к лт при $\Delta \rightarrow 0$

е) Если D - произв. обл., то $\int f(x) dx$ вычисляется через "тонкие" Π -много ($D \subset \mathbb{R}$), метод через $\forall$ разб. D

ж) Опр-е п. е) эквив.

з) Для n -мерного мн-ва можно зап. что $\forall$ функ. f , контр. в D , мн-ва в D , любая функ. f , обладающая I -свойством в D мн-ва в D , выполняющее все св-ва, аналогичные св-вам двойного мн-ва.

② Ф-ла повторного мн-ва (функции)
 Лемма Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $\forall$ прямая, $\parallel OX_1$, пересекает $2D$ не более, чем в 2 точках



$$\text{Тогда } \exists \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_D f(x) dx$$

§5 Замена переменных в n -кратных интегралах

Пусть $u = f(y_1, \dots, y_n)$ мн-ва в $D \in \mathbb{R}^n$

Пусть задано n функций

$y_1 = \psi_1(x_1, \dots, x_n)$
 $y_2 = \psi_2(x_1, \dots, x_n)$
 $\vdots$
 $y_n = \psi_n(x_1, \dots, x_n)$

Ф-ны диф-мы по всем переменным в $D' \subset \mathbb{R}^n$, они осущ. взаимн. одн. соотв. между D' и D

$\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 (т.е. найти $x_1, \dots, x_n$ через $y_1, \dots, y_n$)

$$Y = \Psi(X)$$

Это, например, гарантируется условием невырожденности. Якобиан преобразования в одн. D'

$$\text{Якобиан} = J = \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\left\{ x_{kl} \right\} = \frac{\partial y_k}{\partial x_l}$$

Тогда самовен, суу. обр. отображение!

$$\begin{cases} x_1 = y_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = y_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \in D$$

Связи: $\int_D f(y) dy = \int_{D'} f(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)) |J| dx$

Прор 10 Если ф-ции $\psi_1, \dots, \psi_n$ имеют непр. гом. проиу в D' и $|J| \neq 0$ в оуду в D , то справедливо

$|J|$, где $J = |J|$
 D -в может оудет котом

Примеры замены переменных в n -кратных интегралах

① Линейная замена

$$y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n) \quad \int_D f(y) dy = \int_{\tilde{D}} \tilde{f}(x) J dx$$

$$J = \det \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

$$\psi_j = a_{1j}x_1 + \dots + a_{nj}x_n + b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$$a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$$

Якобиан: $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = a_{ij}$

$\Rightarrow$ Якобиан - это оуд март мик. периф

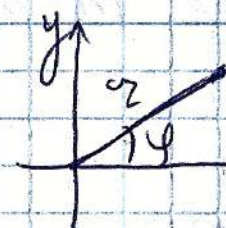
$$A(a_{ij}) \Rightarrow J = |\det A|$$

② Полярная система координат ($n=2$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

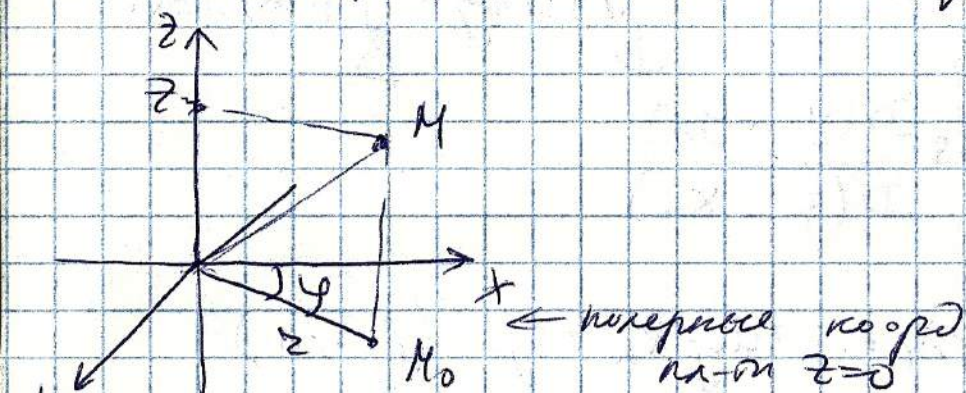
$$(r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi))$$

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$



$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -z \sin \varphi & z \cos \varphi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J = z$$

③ Цилиндрическая система координат

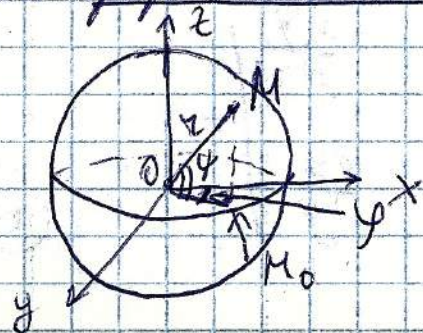


$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r = J$$

④ Сферическая система координат (n=3)



$$r \geq 0$$

$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\text{Если } OM = r, \text{ то } OM_0 = r \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} x &= (r \cos \varphi) \cos \varphi \\ y &= (r \cos \varphi) \sin \varphi \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & \sin \theta \\ -r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ -r \sin \varphi \sin \theta & -r \cos \varphi \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

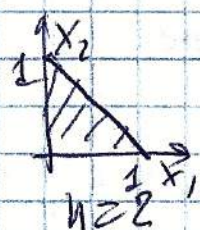
$$\begin{aligned} &= \sin \theta (r^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta) \\ &+ r \cos \varphi (r \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) = \\ &\sin^2 \theta r^2 \cos \varphi + r^2 \cos^3 \varphi = r^2 \cos \varphi = J \end{aligned}$$

Зам. Изучить свойства сфер. сист. коорд. в n-мерном пространстве

Найти объем n-мерного шара

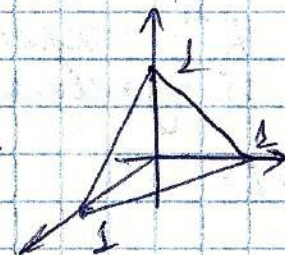
$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \leq R^2$$

Найти объем n-мерного симплекса



$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$



$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$$

n-мерные суммы

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1 \end{cases}$$

§6 Крайние несобственные интегралы

① Конечные несобст. инт. (Римана)
 Расм. m -мер. слуг $(\mathbb{R}^m)$ и $D \in \mathbb{R}^m$

Введём понятие интеграла по D в
 слуг. слуг: 1) D неогр.
 2) задана на D ф-ца $f(x_1, \dots, x_n)$
 неогр.

Зам. $m=1$: неогр. инт. I рода

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$$

Неогр. инт. II рода

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= f(x) \text{ неогр. } \text{при } x \rightarrow a \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \end{aligned}$$

Пусть $D \in \mathbb{R}^m$ - открытое и связное
 слуг-во, $\bar{D}$ - замыкание D .

$$\bar{D} = D \cup \partial D$$

Опр. Слуг. $\{D_n\}$ отк. и связных слуг-в в D
исчерпывает D , если:

1) D_n ограничено и кудрируется
 (имеет n -мерный объём)

2) $\forall n \in \mathbb{N} : D_n \subset D_{n+1}$

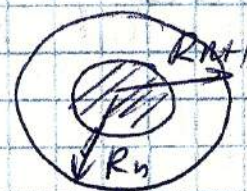
Примеры

1) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ $[a, +\infty)$ исчерпывается

послед-вом слуг $D_n = [a, R_n]$, где $R_n \rightarrow +\infty$



2) $\mathbb{R}^2$ $D_n = \{x^2 + y^2 \leq R_n^2\}$, $R_n \rightarrow +\infty$
 $R_{n+1} > R_n$



③ $D = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

$D_n = \{R_n^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ $R_n \downarrow$

Зам. Если послед-во $\{D_n\}$ исчерпывает D ,

$$\text{то } D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

Расм. $\forall x \in D$. Так D - отк. $\Rightarrow$
 $\exists \varepsilon > 0$ ~~$\exists \delta > 0$~~ $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset D$

$$V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset D \Rightarrow$$

⑥

$\Rightarrow U_{\varepsilon/2}(x) \subset D \Rightarrow$ компакт $\overline{U_{\varepsilon/2}(x)} \subset D$
(замкнутость)

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: K \subset D_n \Rightarrow x \in D_n \Rightarrow D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

Пусть $f(x)$ задана на отк. мн-ве
 $D \in \mathbb{R}^n$ и K компакт $K \subset D$

$$\exists \int_K f(x) dx$$

Опр: Если $\{D_n\}$, исчерпывающая
 D , $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx$ и

его значение не зависит от выбора
 $\{D_n\}$, то говорят, что

$$\int_D f(x) dx \text{ сходится } (= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx)$$

Пример ①

$$[a, +\infty) : \{[a, R_n], R_n \uparrow +\infty\}$$

$$I_n \equiv \int_a^{R_n} f(x) dx \quad \exists m$$

$$I(R) = \int_a^R f(x) dx \text{ имеет предел при } R \rightarrow +\infty$$

$$\textcircled{2} \mathbb{R}^2: \{x^2 + y^2 \leq R_n^2, R_n \uparrow +\infty\} \equiv D_n$$

$$\forall D_n \quad \text{dist}(\partial D_n, 0) \equiv r_n \rightarrow +\infty$$

из определения сходимости несобств.
инт. $\Rightarrow$, что он обладает всеми
линейными и аддитивными

$$1) \int_D (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_D f(x) dx + \beta \int_D g(x) dx$$

$$2) \int_{D_1 \cup D_2} f(x) dx = \int_{D_1} f(x) dx + \int_{D_2} f(x) dx$$

$$D_n^{(1)} = D_n \cap D_1, \quad D_n^{(2)} = D_n \cap D_2$$

② Несобственные интегралы от
непрерывных функций

Пусть в D $f(x) \geq 0$

Теор 1 Для сходимости $\int_D f(x) dx \Leftrightarrow$

$\exists$ посл.-я $\{D_n\}$, исчерпывающая D
 D , для коб. $\int_{D_n} f(x) dx$

$$a_n = \int_{D_n} f(x) dx \text{ ограничена.}$$

Длб: " $\Rightarrow$ " Если инт. сход, то для $\forall$
то справедливо и для этой посл.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ огр.

$\Leftarrow$ 1) $\{a_n\}$ монот. не убав, т.е.

$$a_{n+1} = \int_{D_{n+1}} f(x) dx \geq a_n = \int_{D_n} f(x) dx$$

$$\forall n \quad \overline{D_n} \subset D_{n+1} \subset \overline{D_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \int_{D_{n+1}} f(x) dx = \int_{D_n} f(x) dx + \int_{D_{n+1} \setminus D_n} f(x) dx \geq \int_{D_n} f(x) dx$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ сходится,

2) Рассм. $\forall \{D_n'\}$ неперн. D

$$a_n' = \int_{D_n'} f(x) dx$$

a) $\{a_n'\}$ монот. не убав ($\overline{D_n'} \subset \overline{D_{n+1}'}$)

b) Узор $\{D_n\}$: $\forall n \quad \overline{D_n'} \subset D_{k_n}$ ($\exists k_n$ по n)
компакт в D

$$\Rightarrow a_n' \leq a_{k_n} \quad (\forall n) \quad a_n' \geq 0$$

изр. сверху

$$b) \text{ Тогда } I' = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n' \quad I = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$\text{Тогда } a_n' \leq a_{k_n} \Rightarrow I' \leq I$$

Т.к. в этих рассуждениях посл.

$\{D_n\}$ и $\{D_n'\}$ можно поменять ролями

$$(\forall n \exists k_n: \overline{D_n} \subset D_{k_n})$$

$$\Rightarrow I \leq I'$$

$$\Rightarrow I = I'$$

Пример (Узоран Функция)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Рассм. сдв. необход. уст:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = (I) \quad \mathbb{R}^2 \text{ неперн.}$$

$$D_n = \{x^2 + y^2 < n^2\}$$

$$(I) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos y \\ y = r \sin y \\ 0 \leq r \leq n \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{array} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} dy \int_0^n e^{-r^2} r dr = \int_0^{2\pi} dy \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^n = -\pi e^{-n^2} + \pi$$

$$= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-n^2} \right) = 2\pi$$

$$= 2\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-n^2} + \frac{1}{2} \right) = \pi$$

(58)

Рассм др. пом. $\{D_n'\}$, покрывающую $\mathbb{R}^2$:

$$D_n' = \{ |x| \leq n, |y| \leq n \}$$

по определению сходимости несобственного интеграла:

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n dx \int_{-n}^n dy e^{-x^2-y^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right) = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \cdot \int_0^n e^{-y^2} dy \right) = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Теорема 2 Пусть на D : $0 \leq f(x) \leq g(x)$

Тогда: а) $\int_D g(x) dx < \infty \Rightarrow \int_D f(x) dx < \infty$

$$\text{б) } \int_D f(x) dx \text{ расх.} \Rightarrow \int_D g(x) dx \text{ расх.}$$

Доказ. а) $[0,1] \exists \{D_n\} : a_n = \int_{D_n} g(x) dx$

$$\text{отр} \Rightarrow 0 \leq \int_D f(x) dx \leq a_n$$

$$\int_{D_n} f(x) dx \nearrow \int_D f(x) dx < \infty$$

б) Аналогично, что

Замечание: $g(x) = \frac{C}{|x|^p}$

$$\int_D f(x) dx < \infty \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{C}{|x|^p} \quad (*)$$

Если D неогр. и $D \subset \mathbb{R}^m$, то

(*) с $p > m$ гарантирует сходимость $\int_D f(x) dx$

Если D огр. $D \subset \mathbb{R}^m$ и в окр. $\forall x_0 \in D$

$$f(x) \leq \frac{C}{|x-x_0|^p} \quad f(x) \text{ неогр. в } x_0$$

$$\sim \int_D f(x) dx < \infty \text{ если } p < m$$

③ Несобственное m -кратное интегрирование от произв. ф-ции ($m \geq 2$)

Огр $\int_D f(x) dx, D \in \mathbb{R}^m$

Теор 3 $\int_D f(x) dx$ сход.

$$\int_D |f(x)| dx < \infty$$

$m \geq 2$

(69)

2-го. $\uparrow$ $f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \geq 0$
 $= \begin{cases} 0, & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \geq 0 \end{cases}$

$f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \geq 0$
 $= \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$

$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$ всюду в D
 $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$ всюду в D

$\{r_2\} \Rightarrow \int_D f_{\pm}(x) dx$ сход

$\Rightarrow$ сход $\int_D f_+(x) - f_-(x) dx = \int_D f(x) dx$, 2-го
 {линейность,
 $\Downarrow$ $\int_D f(x) dx$ сход, а $\int_D |f(x)| dx$ расх.

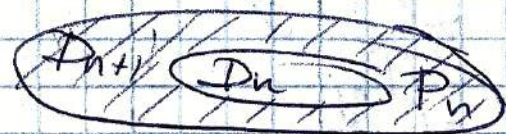
в силу г. 1 $\forall \{D_n\}$, неперн. D

$\int_{\bar{D}_n} |f(x)| dx$ неогр. (опр. сходимости)

монотонно $\nearrow$ неогр. $\rightarrow +\infty$

Последовательность $\{D_n\}$, неперн. D :

$\int_{\bar{D}_{n+1}} |f(x)| dx \geq 3 \int_{\bar{D}_n} |f(x)| dx + 2n + 4, \forall n$



$D_{n+1} = D_n \cup (D_{n+1} \setminus D_n) = D_n \cup P_n$

$\int_{\bar{D}_{n+1}} |f(x)| dx = \int_{\bar{D}_n} |f(x)| dx + \int_{P_n} |f(x)| dx \geq$
 $\geq 3 \int_{\bar{D}_n} |f(x)| dx + 2n + 4 \quad \forall n$

$(\Rightarrow) \int_{\bar{P}_n} |f(x)| dx \geq 2 \int_{\bar{D}_n} |f(x)| dx + 2n + 4 \Leftrightarrow$
 $f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$

$(\Rightarrow) \int_{\bar{P}_n} f_+(x) dx + \int_{\bar{P}_n} f_-(x) dx \geq 2 \int_{\bar{D}_n} |f(x)| dx + 2n + 4$
 $\nearrow \geq \bar{P}_n \nearrow$
 тогда

$\int_{\bar{P}_n} f_+(x) dx \geq \int_{\bar{P}_n} f_-(x) dx \Rightarrow$

(70)

$$\int_{\overline{P}_n} f_+(x) dx \geq \int_{\overline{D}_n} |f(x)| dx + n+1$$

Заметим интеграл в левом часте
на нижнюю интегральную сумму

∃ такое разбиение $\overline{P}_n = \bigcup_{j=1}^r P_{nj}$

$$0 \leq \int_{\overline{P}_n} f_+(x) dx - \sum_{j=1}^r m_j \Delta \sigma_j \leq 1$$

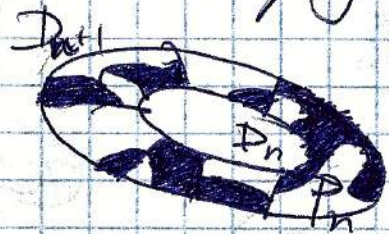
$\nwarrow$ $m_j \Delta \sigma_j$ — площадь P_{nj} $\nearrow$ m_j — высота $m_j f_+$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^r m_j \Delta \sigma_j \geq \int_{\overline{D}_n} |f(x)| dx + n+1$$

Вставим те слог, в коб $m_j > 0$:

Тем самым, в разбиении $\overline{P}_n$
остались только те P_{nj} , в коб $m_j > 0$;

объединим оставшихся частичных
областей разбиения: $\tilde{P}_n$



$m_j < m_j > 0$

То нижняя интегральная
сумма в левом
часте — это нижняя

инт. сумма для $f(x)$ в $\tilde{P}_n$

$$\int_{\overline{P}_n} f(x) dx \geq \sum_{j=1}^r m_j \Delta \sigma_j$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{P}_n} f(x) dx \geq \int_{\overline{D}_n} |f(x)| dx + n+1$$

$$\Leftrightarrow \int_{\overline{P}_n} f(x) dx - \int_{\overline{D}_n} |f(x)| dx \geq n+1$$

$f(x) \geq -|f(x)|$
 $-\int_{\overline{D}_n} |f(x)| dx$

$$\Rightarrow \int_{\overline{P}_n} f(x) dx \geq n+1$$

$\tilde{P}_n \cup D_n$

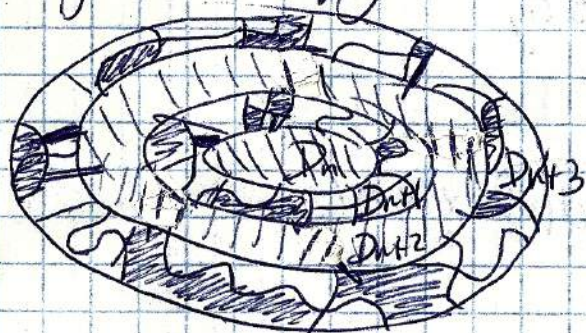
Если, наоборот $\int_{\overline{P}_n} f_- dx > \int_{\overline{P}_n} f_+ dx$

$$\Rightarrow \int_{\overline{P}_n \cup D_n} f(x) dx \leq -n-1$$

Таким образом

$$\left| \int_{\overline{P}_n \cup D_n} f(x) dx \right| \geq n+1$$

Регулярную окрестность 2 шара!



$$\underbrace{\tilde{P}_n \cup D_n^*}_{D_n^*} \subset \underbrace{\tilde{P}_{n+2} \cup D_{n+2}^*}_{D_{n+2}^*}$$

тогда перекрывает D

Чтобы быть связными, соединим узкими каналами (каналы в одномерном смысле!)

Область D_n^* , D_3^* , D_5^* - перекрывает D и св-ва - они могут быть несвязными.

Для $\forall n \in \mathbb{N}$: допишем D_n^*

"каналами" K_n : $D_n^* \cup K_n$ - связное и так, чтобы

$$\left| \int_{K_n} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{n}$$

Пусть $M = \max_{D_n^*} |f(x)|$ и площадь $K_n < \frac{1}{M}$

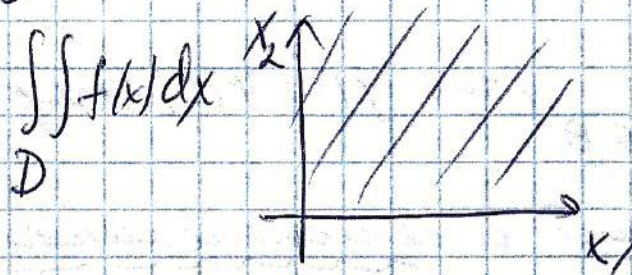
$\Rightarrow$ построена посл. $\{D_n^* \cup K_n\}_{n=2k+1, k \in \mathbb{N}}$,

кот. перекрывает D

$$\Rightarrow \left| \int_{D_n^* \cup K_n} f(x) dx \right| \geq n \Rightarrow \int_D f(x) dx \text{ расх.} \Rightarrow \emptyset, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad [a, +\infty) \text{ непрерывна и монотонна} \quad [a, R], \forall R > a$$

40) Интеграл в смысле Лебесга



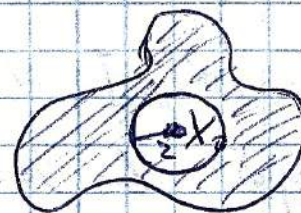
Рассм. $\iint_D f(x) dx = \int_R^{\downarrow} \text{содержимое}$
 $D \cap \{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$ $\int_{R \rightarrow +\infty}$ перекрывает
 I или определен

Если $\exists I_R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I$, то интеграл

в смысле Лебесга равен I

$$I = \text{v.p.} \iint_D f(x) dx$$

$$\text{v.p.} \iint_D f(x) dx =$$



$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{D \setminus \{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leq r^2\}} f(x) dx$$

$$D \setminus \{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leq r^2\}$$

§7 Криволинейное интегрирование

1° Определение

Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана кривая L — параметризуемая:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ где } \varphi(t), \psi(t) - \text{конт.}$$

Без самопересечений и самоналожений

Пусть она не замкнута, т.е. $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \neq (\varphi(\beta), \psi(\beta))$

Пусть в каждой σ L задана ф-ция $f(x, y)$ — конт. вдоль этой кривой:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : M_1, M_2 \in L : \rho(M_1, M_2) < \delta$$

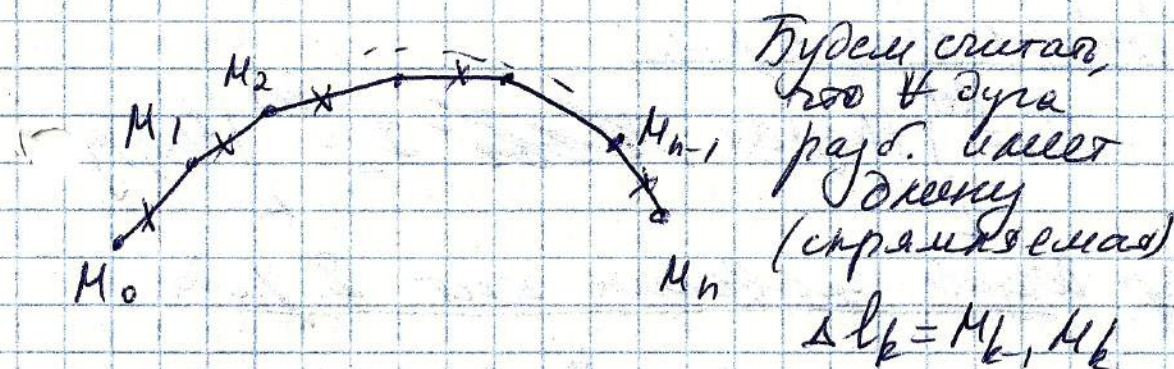
$$\Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$$

$f(x, y)$ равн. конт. на L

Рассм. $\forall$ разб. $[\alpha, \beta]$ $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$,

конт. соотв. разб. L на разб. дуги

$$L : M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0)), M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)), \dots$$



Конт. диф. $\Rightarrow$ спрямляема

На каждой дуге M_{k-1}, M_k выбираем промежуточную точку $N_k(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))$,
 $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$

$$\sigma(f) = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta l_k, \quad \sigma_1(f) = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$$

$$\sigma_2(f) = \sum_{k=1}^n f(N_k) \Delta y_k, \quad \Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})$$

Опр. Сумма $\sigma(f)$ имеет предел при разб. $\rightarrow 0$, равное I , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \text{ разб. дуги } L \text{ с diam } \Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k < \delta \text{ } \forall \text{ выбора точек } N_k \quad |\sigma(f) - I| < \varepsilon$$

I — криволинейный интеграл I рода def

$$I = \int_L f(x, y) dl$$

Криволинейный интеграл II рода

$$I_1 = \int_L f(x, y) dx \quad I_2 = \int_L f(x, y) dy$$

Одн. связность криволинейного интеграла II рода

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \stackrel{\text{def}}{=} \int P(x, y) dx + \int Q(x, y) dy$$

L — область при непрерывных функциях $P(x, y)$, $Q(x, y)$

Зам.: криволинейный интеграл II рода не зависит от направления обхода L

$$G(f) = \sum_{i=1}^n f(N_i) \Delta l_i$$

$A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \quad B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$

Криволинейный интеграл II рода

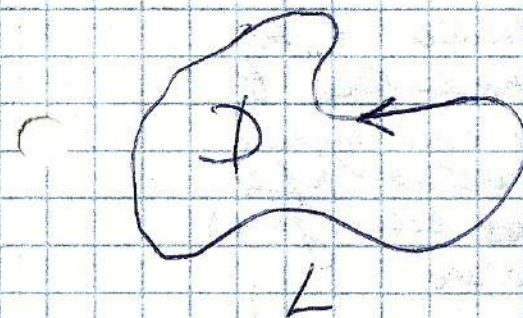
$$G_1(P) = \sum_{i=1}^n P(N_i) \Delta x_i \quad \Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$$

Если кривая L проходит в одр. напр. (от B к A), то криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный.

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \tau(t) \end{cases} \quad \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

Если контур L (кривая L) замкнут ($A=B$) то получается

$\oint$ направление обхода контура
по часовой.



Положительный обход (по часовой стрелке)
 D — область

§2 Условия существования криволинейного интеграла

В определенных кривая L параметризуется (φ, ψ, τ) — кривая

кривая L спрямляемая
интегр. функции кривой L

Предположим: кривая L — гладкая, т.е. $\varphi(t), \psi(t), \tau(t)$ — кривые дифференцируемые

Все точки кривой L — неособые, т.е.

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\tau'(t)]^2 \neq 0$$

Теорема: В данных предположениях криволинейные интегралы I и II рода существуют и вычисляются по формулам:

$$I_P: \int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

$$I_P: \int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$$

(74)

D-to-5 the ans. to parallel rays F, m .

Угол от центр. функции параметра t

2) Покажем, что предельная инт. силы
приводит инт. в левых частях при
близк. разб. $\rightarrow 0$ явл. ~~гипот.~~ гипот. экстр.
соотв. инт. в правых частях.

Введем разбиение кривой $L: \alpha \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$

Подаю для первого рассмотрения:

Можно две функции аппроксимировать:

$$G(f) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2} d\xi$$

N_i H_i
 Δl_i
 $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Так же для 2-го интервала

$$G_1(P) = \sum_{i=1}^n P(\psi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P(\psi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} y'(\xi) d\xi$$

составили разность:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) - \langle \text{унт в пр. расч} \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \cdot \\ &\cdot \sqrt{(\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2} d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \\ &\cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{[f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))] + f(\varphi(t), \psi(t))}_{\text{Riemann sum of } f(\varphi(t), \psi(t))} \cdot \underbrace{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}}_{\text{arc length element}} dt$$

Тугой диаметр разб. при $L \rightarrow 0$

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_i \rightarrow 0. \text{ Покажем, что верно}$$

$$s^2 = \max_{1 \leq e \leq n} st_i \rightarrow 0$$

$$\Delta t_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(p'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2} d\xi$$

Если во всех точках $L: (\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2 \neq 0$

$\psi(t), \psi'(t)$ непрерывны на L
 $\Rightarrow m = \min_{\alpha \leq t \leq \beta} ((\psi'(t))^2 + (\psi(t))^2) \geq 0$

отсюда $T \cdot B$ и $\text{rank}(T \cdot B) \neq 0$ (иначе)

$$\Rightarrow \Delta l_i \geq \sqrt{u_i} \Delta t_i$$

$$\text{d. } \max_i \Delta t_i \rightarrow 0 \Rightarrow \max_i \Delta t_i \rightarrow 0$$

$$\text{Pr. } \max_i \delta t_i \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \max_i l_i$$

75

$N_{i-1} \times \dots \times N_i$
 $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$
 в семействе равномерной крив.
 f - функ. $f(\varphi(t), \psi(t))$
 на $[\alpha \leq t \leq \beta]$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ произв. t
 $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]: |t_1 - t_2| < \delta$
 $\Rightarrow |f(\varphi(t_1), \psi(t_1)) - f(\varphi(t_2), \psi(t_2))| < \varepsilon$

$t_{i-1} \leq t \leq t_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$
 Если диаметр $\delta = \max \Delta t_i$ мал

$$\begin{aligned}
 |G(f) - \langle \dots \rangle| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\dots \right] \sqrt{\dots} dt \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))| \cdot \\
 &\quad \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt < \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$< \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dots} dt = \varepsilon \cdot \langle \text{length } L \rangle = \varepsilon |L|$$

длина крив. дуги

$$\begin{aligned}
 R_p: G_1(P) - \langle \text{up \& down} \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \cdot \\
 &\cdot \varphi'(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - P(\varphi(t), \psi(t))] \cdot \\
 &\cdot \varphi'(t) dt
 \end{aligned}$$

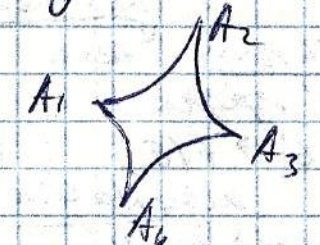
Аналогично $|G_1(P) - \langle \dots \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - P(\varphi(t), \psi(t))| \cdot \varphi'(t) dt$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\alpha}^{\beta} |P(\varphi(t), \psi(t))| |\varphi'(t)| dt < \varepsilon \cdot \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi'(t)| \cdot (\beta - \alpha)$$

const

Зам 1 Теор 1 справедлива и для кривых L

Зам 2 Теор 1 обобщается на случай криволинейных L (= кривых, образованных конечным числом гладких участков не имеющих других точек)



$$\int_L f dl = \sum_{k=1}^N \int_{L_k} f dl$$

Зам 3 Криволинейн. интегралы обладают теми же св-вами, что и обычные интегралы Римана (аддитивность, линейность, оценки для интеграла (модуль), теор. о пр.)

Глава IV Поверхностные интегралы

§9 Понятие поверхности

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, одн. $G \subset \mathbb{R}^2$

Опр. Вложение $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)

называется гомеоморфизмом, если:

- 1) оно взаимнооднозначно (а, значит, у него есть обратное f^{-1})
- 2) f, f^{-1} конт. функц. любая функц. конт. по $\{M_k\} \subset G \Rightarrow$ функц. конт. по $\{f(M_k)\} \subset f(G)$

$f(G)$ - образ обл. G .

f функ. позн. $\{N_k\} \subset f(G) \xrightarrow{f^{-1}}$ функ.

позн. $\{f^{-1}(N_k)\} \subset G$

Пример Функ. $z = z(x, y)$, к-р в обл. G , она явл-ся гомеоморфизм. между G и мн-вом точек $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, z(x, y))\}$$

$$\{(x_k, y_k)\} \text{ функ.} \Rightarrow \{(x_k, y_k, z(x_k, y_k))\} \text{ функ.}$$

Опр Мн-во $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ наз. элементарное, если оно явл. образом нек. открытого круга $G \subset \mathbb{R}^2$ при гомеоморфизме $f: G \rightarrow \Phi$

Опр Поверхность в $\mathbb{R}^3$ наз. простой, если:

- 1) она связна
- 2) ~~каждая~~ для каждой τ ~~этой~~ мн-ва ~~поверхности~~ $\exists$ окр-н, явл. элементарной поверхностью.

Мн-во $(x, y, z(x, y))$ - "график" крив. f -ции

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{Сфера:} \quad \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \psi \\ y = R \sin \varphi \cos \psi \\ z = R \sin \psi \end{cases}$$

$$(\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2]$$

сфера

Опр: Отражение прямой пов-ти G в $\mathbb{R}^3$ наз. локально-гомеоморфизм, если $\forall M \in G \exists$ окр., кот. гомеоморфно отображается на свой образ.

Опр Мн-во $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ наз. общей поверхностью, если оно явл. образом прямой пов. при нек. лок. гомеом. отображении.

круг $\equiv$ шар

$$\Phi \in \mathbb{R}^3 \leftarrow f: G \subset \mathbb{R}^2$$

откр. к-во $\mathbb{R}^2$.

Регулярные поверхности

Опр $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ наз. k рай-диф-ной пов-тью, если $\forall M \in \Phi \exists$ окр-н τ M , в кот. пов-ть допускает параметризацию:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \text{ где } (u, v) \in G \text{ - прост. обл. в } \mathbb{R}^2, \\ x(u, v), y(u, v), z(u, v) \text{ явл. } k \text{ рай-диф-ны в } G$$

Если $k=1$: пов-ть Φ наз. гладкая

Данная параметризация точки Φ явл. локальной

Опр Точка $M_0 \in \Phi$ (k рай-диф.) наз. регулярной (регулярной, нормальной), если в её окр-н можно ввести параметризацию: так что:

$$(*) \quad \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2$$

векторы не пропорциональны

(77)

? к-ра дифф. пов-и Φ д-у особ-х точек

Теорема 1 Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ - проств. обл.
и пусть на G заданы $x = x(u, v)$,
 $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ ($(u, v) \in G$), кот.
к-ра дифф. и $z_u(u) \neq 0$ в
каждой точке G . Тогда составление

(V) $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ определяет метку $\Phi \in \mathbb{R}^3$, кот.
явл. к-ра дифф. пов-и
д-у особ-х точек.

Д-во (V) оп-т. некое отображение проств.
обл. $G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi \in \mathbb{R}^3$

Надо доп., что это отображение явл. нек.
гомеоморфизмом.

f - непрерывное (прямое соотр.)

По опр. рамка Φ_0 - элемент 2-го порядка,
опирающийся от Φ (Пусть это элемент в
1 и 2 порядках)

(W) $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \leftarrow$ Якобиан преобразования
координат по ф-циям
 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

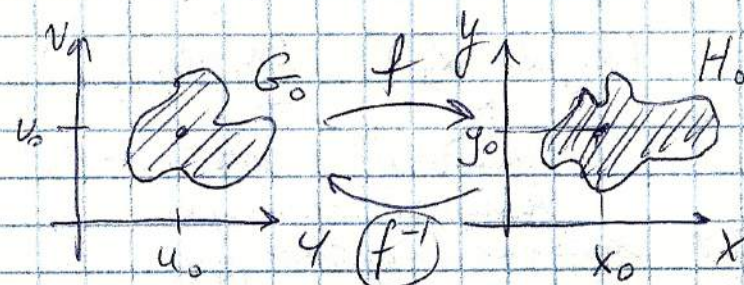
Рассм. $\forall \Phi_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ и пусть в нек.
ее окр-ти (W) $\neq 0$

Если $\Phi_0 \neq 0$, то в силу нек-и в нек.
окр-ти $\neq 0$

Применим к системе $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ теорему

о разрешимости (т. о. неявно заданной)
ф-ции. В силу теор. существует
к-ра дифф. ф-ция
 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ кот. явл. (*)

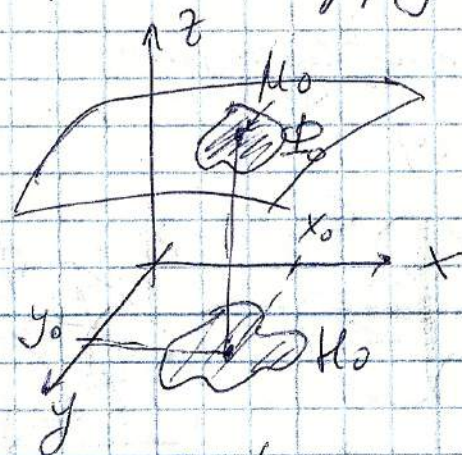
Эти 2 системы задают 2 взаимно обратных
отображений нек. окр-ти
т. $(u_0, v_0) \in G$



Это с. о. неявные ф-ции.

$\Rightarrow f$ - гомеоморфизм (локальный)

Рассм. $\forall \Phi_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$



$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) \end{cases}$$

$\forall (u, v) \in G_0 \Rightarrow$

$$(x, y) \in K_0 \rightarrow (x, y, z) \rightarrow \Phi_0$$

Эт. т. можно упр-ть посл.
координату.

(78)

⇒ Суперпозиция этих отображений и задает
 лок. гомотоморфизм $G \rightarrow \Phi$

Зам. из лем. 1.1 ⇒ $\forall M_0 \in \Phi \exists$ окр. Φ_0
 кот. биекционно и однозначно проецируется на
 нек. координатную пл-ть

Векторное описание пов-и

Пл-ть в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \leftarrow \text{матричные функции}$$

$$\begin{cases} x = \alpha_1 u + \beta_1 v + \delta_1 \\ y = \alpha_2 u + \beta_2 v + \delta_2 \\ z = \alpha_3 u + \beta_3 v + \delta_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{векторы, } \parallel \text{ этой пл-ти,} \\ \text{направляющиеся}$$

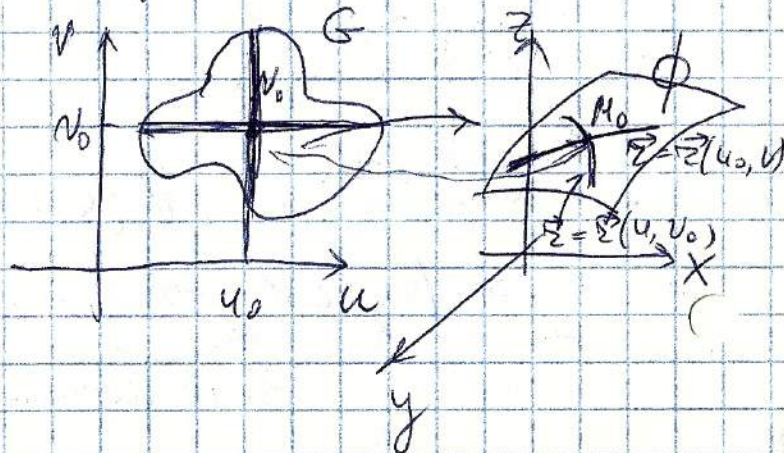
Они должны быть неколлинеарны

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \text{rg} = 2$$

Рассм. теперь произв. параметризацию

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\forall M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$N_0(u_0, v_0)$$

Рассм. в G , в кот. $u_0 = \text{const}$

$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ параметризовано 1 параметром v

Получим криволинейное координатное на Φ

Сфера радиуса R

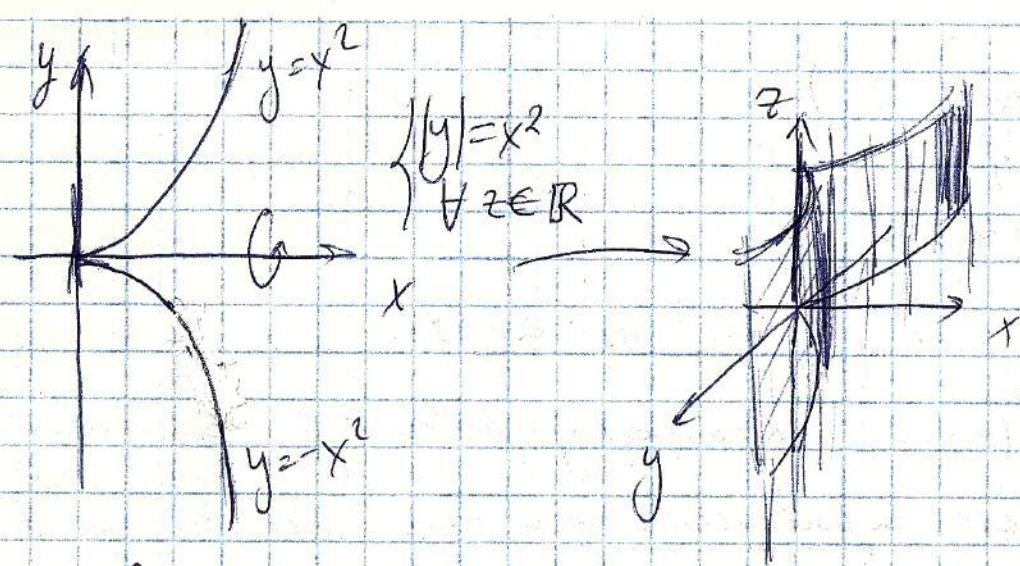
$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v \\ y = R \sin u \cos v \\ z = R \sin v \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{при фикс } v - \text{параллель} \\ \text{линии } u - \text{меридиан} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \vec{r}_u = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\} \text{ при фикс } v=v_0 \\ \vec{r}_v = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\} \text{ при фикс } u=u_0 \end{matrix}$$



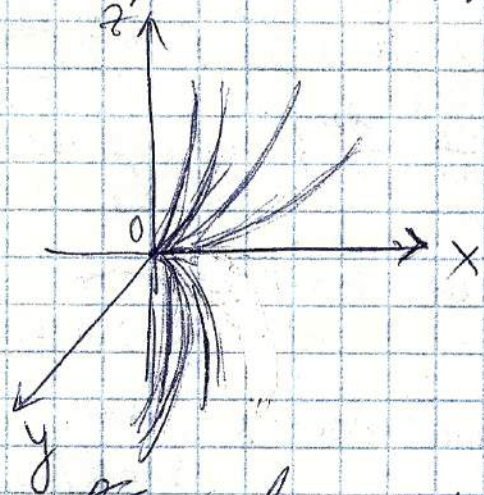
~~Эти векторы неколлинеарны, т.е. $\text{rg} = 2$ и, следовательно, касательная~~

Если M_0 - кривая $\Rightarrow \text{rg} = 2 \Rightarrow$ векторы
 неколлинеарны $\Rightarrow$ в G $M_0 \exists$ пл-ть (проецируемая
 через M_0), $\parallel \vec{r}_u, \vec{r}_v =$ касат. пл-ть к Φ в M_0



вс. $\tau. (0, 0, z)$ - особые

$|y| = x^2$
вращение вокруг x точки $(0, 0, 0)$ особая



~~Вектор~~ век. произв. $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$
(т.к. неколлинеар. и $\vec{r}_u \neq 0$ и $\vec{r}_v \neq 0$)

- вектор нормали к к-ти Φ

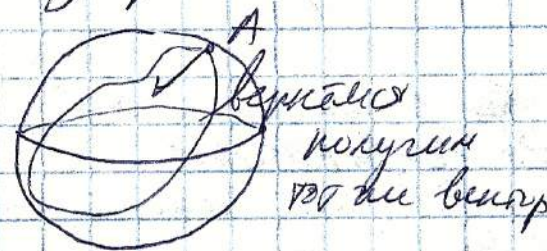
$\vec{N}(u, v) = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ в $\forall \tau.$ пов-ти Φ $\exists$ вектор нормали

$$\vec{n}(u, v) = \frac{1}{|\vec{N}(u, v)|} \vec{N}(u, v)$$

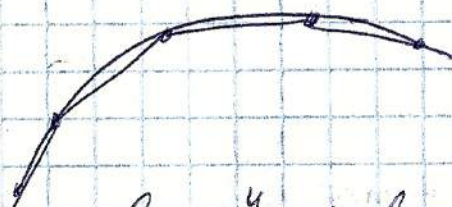
На пов-ти Φ имеется векторное поле нормалей

из $\tau. 1 \Rightarrow$ в окр-ти мод. $\tau.$ пов-ти Φ
ф-ция $\vec{n}(u, v)$ явл. непрерыв. (непр. в окр.
каждого $\tau.$) (но не на всей пов-ти Φ)

Окр. Если на всей пов-ти Φ $\exists$ непрерыв.
поле нормалей, то пов-ть Φ наз.
двусторонней



Например, поверхность Мёбиуса - не явл. двусторон.



$\exists$ суп. эквив. сглаженная кривая

"Самолет" Шварца

пов-ть многогранника
сильно удобно
в работе

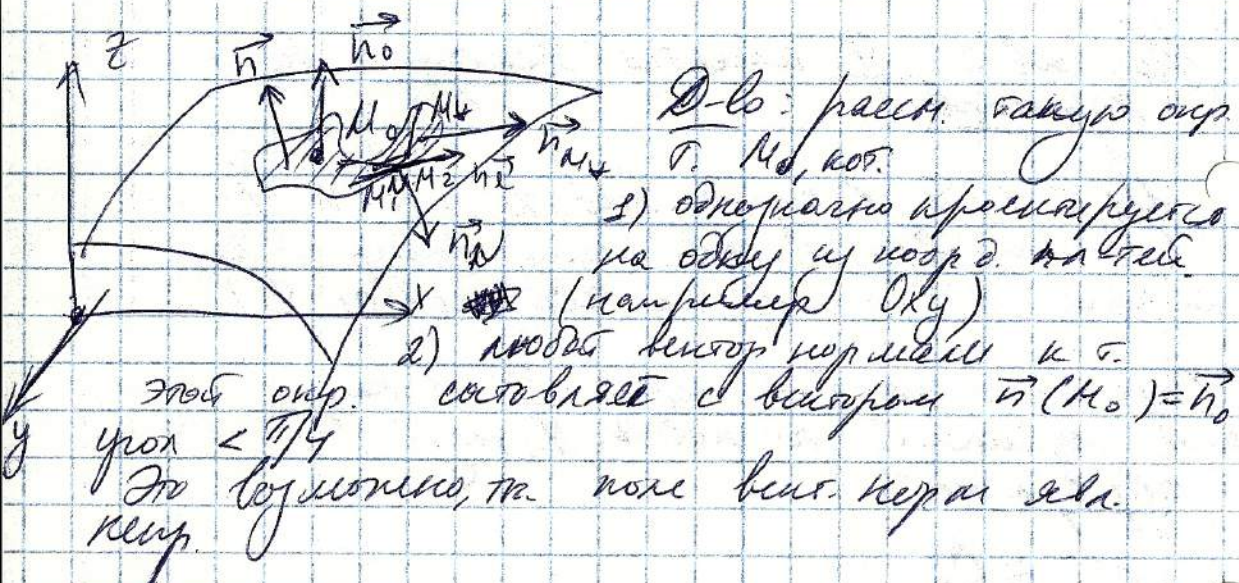


Вспомогательные леммы о пов-ти

Лемма 1 Пусть $\tau.$ $M_0 \in \Phi$ - особая $\tau.$
каждая пов-ти Φ . Тогда

$\exists$ окр. этого $\tau.$ M_0 , кот. односторонне
проектируется на модуль касат. пл-ти, проведенную
в точке этого окр.

(80)



Пусть есть т. на пл-ти, ~~то~~ в пределах этой окр., у кот. $\exists \vec{n}_{M_0}$. ~~Каждый вектор~~ и соотв. ему касат. пл-ть ~~однозначно~~ ~~проект.~~ в M_0 .
 В ~~пределах~~ этой окр. есть 2 точки M_1, M_2 кот. при проектировании на эту касат. пл-ть дают одну проекцию.
 $\Rightarrow$ вектор $M_1 M_2 \parallel \vec{n}_{M_0}$
 т. $M_1 M_2 \perp$ этой пл-ти.

Рассм. кривую на этой поверхности, проходящую через M_1, M_2 . Т.к. поверхность Φ гладкая $\Rightarrow$ кривая - гладкая. В силу т. Лагранжа $\exists$ т. на этой кривой в кот. касат. $\parallel (M_1, M_2)$ (Пусть в т. N).
 Эти 2 нормали $\vec{n}_N \perp$ этой касат.

$\Rightarrow \vec{n}_N \perp \vec{n}_N$ ~~т.к. $\vec{n}_N \parallel \vec{n}_{M_0}$~~ $\Rightarrow$ противоречие т. между двумя вект. $\vec{n}_N$
 этой окр. и вект. $\vec{n}_{M_0}$ угол $< \pi/2$

$\Rightarrow (\vec{n}_N, \vec{n}_0) < \pi/2$ противоречие, т.к.

$\{\vec{\Sigma}_u, \vec{\Sigma}_v\}$ - касат. к пов-ти Φ

В каждой т. $\vec{\Sigma}_u \neq \vec{\Sigma}_v$

Окр. пов-ти Φ назыв. полной если любая функ. пов-ти точек $\{M_n\} \subset \Phi$ сход. к точке на этой пов-ти

Окр. размер газа пов. Φ это $\sup |M_1, M_2|$
 $M_1, M_2 \in \Phi$

Если размер $< \delta \Rightarrow$ это означает, что любую газ пов-ти можно поместить в нек. шар радиуса диаметра δ

Лемма 2 Пусть Φ - гладкая полная пов-ть без особых точек; эта пов-ть - ограничена. Тогда $\exists \delta > 0$: $\forall$ газ пов-ти Φ размера $< \delta$ однозначно проектируется на любую касат. пл-ть



Д-во. В противн. Пусть $\forall \delta_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}) \exists$ газ окр. т. $M_n \in \Phi$ Φ_n , кот. не удовл. усл. леммы 1

Во газе удовл. условию 1

Рассм. $\{M_n\}$ - одна окр.

(т.к. Φ окр.) $\Rightarrow \exists \{M_{n_k}\}$ явл. сход.

Т.к. пов-ть Φ полная, то $\lim \{M_{n_k}\} = M_0 \in \Phi$

M_{n_1}, M_{n_2}

То окр. предела ~~бесконечного~~ окр. т. M_0 в кот. расположено беск. много точек подгоса

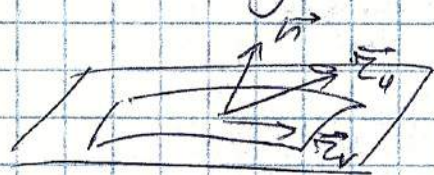
Согласно 1.1 у г. № 3 окр., кот. однозначно
проектируется на K вдоль касат. пл-ти
 $\Rightarrow$ в этой окр. всегда найдется σ .

M_{n+1} , кот. входит в эту окр. вместе с Φ_{n+1}
— которая и удовл. 1.1 $\Rightarrow$ противоречие, что

Лемма 3 Пусть Φ — такая же, как в лемме 2
тогда $\exists \delta > 0$: $\forall$ касат. пов-ти Φ однозначно
проектируется на нек- коорд. пл-ть ради $< \delta$

Д-во: Возвращем $\delta > 0$ из утв. 1.2
рассм. все вект. лв. норм. к точкам
касат. пов-ти ради $< \delta$.

Рассм. K т. ж. все касат. пов-ти вместе с соотв.
вект. норм. $\vec{n}$ (в силу 1.2. эта касат.
пов-ти однозначно проект. на касат. пл-ть)



$$\vec{n} = \{\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3\}$$

Направляющие косинусы

$$|\vec{n}| = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

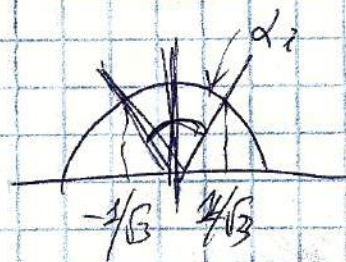
Угол, кот. составляет вектор с осями
координат.



$$\Rightarrow \exists \cos^2 \alpha_i \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |\cos \alpha_i| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ Всегда можно эту проекцию, кот.
получается при проектировании на
касат. плоскость однозначно проектировать
спроектировав на коорд. пл-ть $\perp \vec{e}_i$



Лемма 4 Пусть Φ —
— гладкая полная окр.
ду осей кот. —
двухсторонняя пов-ть.

тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:
любая касат. пов-ти Φ ради $< \delta$ удовл.

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 - \alpha_\Phi, \quad |\alpha_\Phi| < \varepsilon$$

Д-во: Двухсторонняя на пов-ти Φ
 $\exists$ непрерыв. поле норм., т.е.

$\vec{n}(M)$ — непрерывное на Φ

П.к. поверхность полная и ограниченная,
то $\vec{n}(M)$ равно непрерыв. на Φ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M_1, M_2 \in \Phi |M_1 - M_2| < \delta$$

$$\Rightarrow |\vec{n}(M_1) - \vec{n}(M_2)| < \varepsilon$$

$$|\vec{n}(M_1) - \vec{n}(M_2)|^2 = (\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_2)) +$$

$$+ (\vec{n}_2(M_2), \vec{n}(M_2)) - 2(\vec{n}(M_1), \vec{n}(M_2))$$

$$= 2 - 2\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) < \varepsilon^2$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 - (1 - \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)) =$$

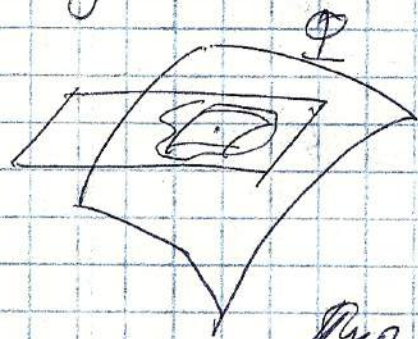
$$= 1 - \frac{1}{2} |\vec{n}_1 - \vec{n}_2|^2 < \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

$$\alpha_\Phi = \frac{1}{2} |\vec{n}_1 - \vec{n}_2|^2 < \frac{1}{2} \varepsilon^2 \equiv \varepsilon$$

§10 Площадь пов-ти

1° Покрытие площади пов-ти

Пусть Φ - гладкая пов-ть в $\mathbb{R}^3$
без осовых точек



Разобьем пов. Φ на
части $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ так,
чтобы $\forall \Phi_i$ однозначно
проектировалась на
пл-ть свою касат. пл-ть

Пусть δ_i - радиус Φ_i и

положим $\delta = \max_{1 \leq i \leq N} \delta_i$

В каждой части Φ_i выберем Φ_i
точку $\sigma_i \in \Phi_i$ и спроектируем Φ_i
на касат. пл-ть в σ_i

Обозначим через σ_i - площадь этой пов.
(проекции)

Окр. пов. Φ квадрируема (имеет площадь
 $= \sigma$), если
 $\sum_{i=1}^N \delta_i$ имеет предел σ при $\delta \rightarrow 0$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ разб. $\Phi = \bigcup_{i=1}^N \Phi_i$

указ-вша и диаметра $\Delta < \delta$
анжко

$\forall$ выбора $\sigma_i \in \Phi_i : \left| \sum_{i=1}^N \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon$

2° Квадрируемость гладких поверхностей

Теор! любая гладкая отр. пов-ть
без осовых точек квадрируема

До: 1) Пусть пов-ть Φ допускает единую
параметризацию, т.е.

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} : G \rightarrow \Phi \in \mathbb{R}^3$$

(u, v) (гомеоморфизм)
т.к. пов-ть гладкая $\Rightarrow \Phi$ имеет крив-дифф

$x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ крив-дифф в $\mathbb{R}^3$

Положим $\sigma = \int_G \sqrt{E, F, G} du dv$

$\sigma_v = \sqrt{E, F, G}$ крив в $\mathbb{R}^3$

Покажем, что пов-ть Φ имеет площадь

$$\sigma = \iint_G \sqrt{E, F, G} du dv$$

σ крив

Рассм. $\forall \varepsilon > 0$ и погрешн $\delta > 0$:

1) $\forall$ части Φ размера $< \delta$ однозначно
проектируется на пл-ть свою касат.
пл-ть. (л.2)

2) $\cos(\pi_1, \pi_2) = \pm \Delta \Phi$

$M_1, M_2 \in$ части $\Phi : \Phi_i$

$$\begin{cases} 0 \leq \Delta \Phi_i \leq \frac{\varepsilon}{\sigma} \\ 0 \leq \Delta < 1 \end{cases}$$

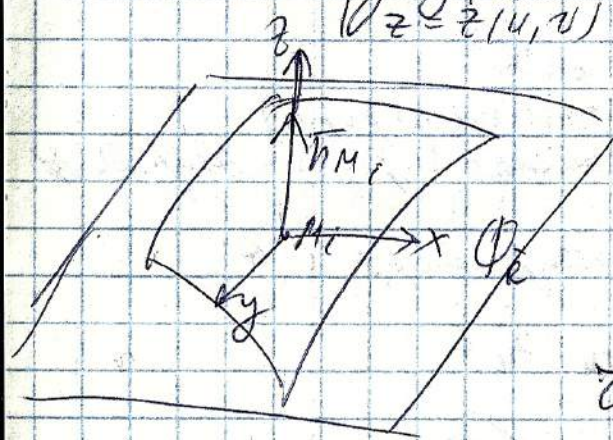
(83)

Разобьем Φ на конечное число частей

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i, \quad \Phi_i \text{ радиуса } < \delta.$$

$\Phi_i \rightarrow G_i$, т.е. параметризующая область

$$\Phi_i: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in G_i$$



Введем локальную на Φ_i прямую сист. координ. (правая)

$$\vec{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}$$

$$\vec{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\}$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix},$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right\} = \{A, B, C\}$$

↑
координ. вект. нормали

анализ
анализ
анализ
В предельном случае Φ : $\epsilon > 0$

$\vec{n}_m$ - вектор нормали в проб. точке поверхности; $\vec{n}_m \parallel \{A, B, C\}$

Площадь проекции на касат. пл-но ($\equiv G_i$) = площ. проекции на координ. пл-но Oxy (локальную)

$$\Phi_i: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in G_i$$

Проекция на $z=0$: $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

$$G_i = \iint_{G_i} \underbrace{\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|}_{C} du dv$$

$$\iint_{G_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv = \iint_{G_i} \underbrace{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}_{C} du dv \quad (*)$$

$$\Leftarrow \frac{C}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \cos(\widehat{n_{m_i}, n_m}) \equiv \cos(\widehat{\vec{n}_m, \vec{Oz}})$$

3-й координатный вектор - нормаль к поверхности (нормаль)

$$(*) \quad \text{т.е. среднее } \frac{1}{\cos(\widehat{\vec{n}_{m_i}, \vec{Oz}})} \iint_{G_i} C du dv =$$

$$= \frac{1}{\cos(\widehat{\vec{n}_{m_i}, \vec{Oz}})} \cdot G_i$$

(84)

$$\sigma_i = \cos(\hat{n}_{\sigma_i}, \vec{0z}) \iint_{G_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv$$

$\wedge$ σ_i $\{ \text{компл.} \}$
 $1 - \Delta \phi_i, \text{ где } |\Delta \phi_i| < \frac{\varepsilon}{6} \text{ на } i=1, \dots, N$

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i = \sum_{i=1}^N \iint_{G_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv =$$

$$= \sum_{i=1}^N \Delta \phi_i \iint_{G_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^N \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon \Rightarrow \text{верно}$$

① Если Φ не допускает единого параметризации, то по лемме 3 Φ можно разб. на конечное число частей Φ_i , каждая из кот. однозначно параметризуема на 1 из коорд. плоскостей

$\Rightarrow$ эту часть можно параметризовать

(Ка Oxy : $\Phi_i \rightarrow \Sigma_k: z = z(x, y), (x, y) \in \Sigma$)
 $\Rightarrow$ можно параметризовать)

Зам Если Φ допуск. единое парам., то

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \text{ где } A, B, C -$$

-миноры 2-го пор. матр $\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$|(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}]|^2 + |(\vec{a}, \vec{b})|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{\underbrace{|\vec{r}_u|^2}_E \underbrace{|\vec{r}_v|^2}_F - \underbrace{(\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2}_G^2} =$$

$$= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \text{матр. Грама} \\ (\vec{r}_u, \vec{r}_u) & (\vec{r}_u, \vec{r}_v) \\ (\vec{r}_v, \vec{r}_u) & (\vec{r}_v, \vec{r}_v) \end{pmatrix}}$$

Зам Если пов. Φ кусочно-гладкая и каждая ее гладкая часть удовл. T_1 и T_2 в силу аддитивности интеграла Φ квадрат.

Зам Φ -на зависит от параметризации.

Однако площадь и соотв. инт. не зависят от параметризации пов.

Можно перейти от 1 ~~парам~~ парам к др.

Можно объяснить геометрически:

--- не зав. от параметризации
 $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ др парам.

§ 11 Поверхностные интегралы

① определение

- Пусть Φ - глад. збл. полная сгр. сг. особн. ток. пов-в
- Пусть $\pi(M)$ - кевр. поле единичных нормалей к Φ
- Пусть на Φ задана ф-ция $\psi = f(M)$

Сг. разб. пов. Φ на конечн. число квдр. частей $\Phi = \bigcup_{i=1}^N \Phi_i$

"Размер Φ_i " $\leadsto \delta_i$ - площадь Φ_i
 $\Delta = \max_{1 \leq i \leq N} \delta_i$ - диаметр разбиения

Возьмем в каждой Φ_i $M_i \in \Phi_i \rightarrow \pi(M_i) = \{\cos \chi_i, \cos \psi_i, \cos \tau_i\}$

Интегральные суммы

$$S_0(f) = \sum_{i=1}^N f(M_i) \delta_i$$

$$S_1(f) = \sum_{i=1}^N f(M_i) \cos \chi_i \delta_i$$

$$S_2(f) = \sum_{i=1}^N f(M_i) \cos \psi_i \delta_i$$

$$S_3(f) = \sum_{i=1}^N f(M_i) \cos \tau_i \delta_i$$

Зам. Площадь поверхности и интеграл, выражающий эту площадь, не зависят от параметризации пов-ти

Всп. Число I_0 (соств. I_1, I_2, I_3) явл. пределами этих инт. сумм при $\Delta \rightarrow 0$
 если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ разб. Φ на части $\Phi = \bigcup_{i=1}^N \Phi_i$ с diam $\Delta < \delta$

и $\forall$ выб. точек $M_i \in \Phi_i$

$$|S_0(f) - I_0| < \varepsilon \quad (\text{соств. } |S_1(f) - I_1| < \varepsilon, \dots)$$

Поверхностный интеграл I рода:

$$I_0 = \iint_{\Phi} f(M) d\sigma$$

Пов. инт. II рода:

$$I_1 = \iint_{\Phi} f(M) \cos \chi d\sigma$$

Объем пов. инт. II рода

$$\iint_{\Phi} (P(M) \cos \chi + Q(M) \cos \psi + R(M) \cos \tau) d\sigma$$

$$I_2 = \dots \quad I_3 = \dots$$

Зам.: Пов. инт. I рода не зависят от выбора нормалей $\pi(M)$ или от выбора стороны поверхности, а пов. инт. II рода - меняют свой знак при смене стороны поверхности

Зам. Если на Φ выбрана сторона
(т.е. выбрано определенное поле
нормальной, то пов. пов. имеет II рода
всл. по сути имеет I рода

$$I_1 = \iint_{\Phi} \underbrace{f(M)}_{f_1(M)} \cos \chi d\sigma$$

§11 Поверхностные интегралы

2° Существование

Теор. Пусть Φ - гладкая, полная, огр.
область без осовых точек пов.-н.
Пусть Φ допускает единую параметри-
зацию.

$$(x, y, z) \in \Phi: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{где } (u, v) \in G - \text{огр.-гладкая обл.}$$

Пусть $w = f(M)$ - крив. на Φ . Тогда
пов. инт I_0 $\exists$ и вычисляется по ф-ле:

$$\iint_{\Phi} f(M) d\sigma = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{EF - G^2} du dv$$

$$\sqrt{EF - G^2} du dv$$

$$E = (\bar{x}_u, \bar{x}_u) \quad F = (\bar{x}_v, \bar{x}_v) \quad G = (\bar{x}_u, \bar{x}_v)$$

Дл. Интеграл в правой части

$\exists$, т.к. f крив. пов.-н.
($f = f(u, v)$) / 1-корне-знач. функ. f
(в кривой гладкой) $\Rightarrow$ интеграл
непр.

Рассм. пов. разб. $\Phi = \bigcup_{i=1}^N \Phi_i$ $\forall$ разбиения

$M_i \in \Phi_i$ и diam. разб. $< \delta$. Запишем

соотв. инт. функции f по $\Phi_i \rightarrow G_i$ - гл. подобн.

$$G_0(f) = \sum_{i=1}^N f(M_i) G_i(\Phi) \quad (\text{условия } M_i(x_i, y_i, z_i))$$

$$x_i = x(u_i, v_i) \quad y_i = y(u_i, v_i) \quad z_i = z(u_i, v_i)$$

$$(*) = \sum_{i=1}^N f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \cdot$$

$$\cdot \iint_{G_i} \sqrt{EF - G^2} du dv$$

Разбиение пов.-н. на части порождает
разб. обл. $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$ на части. В силу

гомеоморфности параметризаций

При диаметре разб. пов.-н. $\bigcup_{i=1}^N \Phi_i$, стремящегося
к 0 ($\delta \rightarrow 0$) получ.

диаметр разб. G разбивая обл. G ,

также $\rightarrow 0$ ($\delta_n \rightarrow 0$)

Вставим и оценим разность:

$$G_0(f) - I_0$$

(87)

$$G_0(f) - I_0 = \sum_{i=1}^N \underbrace{f(x(u_i, v_i), y_i, z_i)}_{f[u_i, v_i]} \cdot \underbrace{\iint_{G_i} \sqrt{EF-G^2} du dv}_{G_i \text{ — площадь } G_i} \\ = \sum_{i=1}^N \iint_{G_i} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EF-G^2} du dv$$

$$= \sum_{i=1}^N f[u_i, v_i] \sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i] \iint_{G_i} du dv - I = \\ \underbrace{\sum_{i=1}^N f[u_i, v_i] \sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i] G_i^*}_{\text{значение } \sqrt{EF-G^2} \text{ в } G_i \text{ счит. на } (u_i, v_i)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N f[u_i, v_i] \sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i] G_i^*}_{\text{площадь } G_i = G_i^*} - I$$

$$= \sum_{i=1}^N f[u_i, v_i] \sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i] G_i^* + \\ + \sum_{i=1}^N f[u_i, v_i] (\sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i] - \sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i]) G_i^* - I$$

Пусть $C_0 > 0$: $|f(u)| \leq C_0$ $(u_i, v_i), (\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \in G_i$

$\forall u \in \Phi$. Пусть $|G|$ — площадь обл. G
 Тогда $\forall \varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$:

1) Разность $|\sum_{i=1}^N f[u_i, v_i] \sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i] G_i^* - I| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall$ разбиения обл. G на части с диаметром δ

2) $|\sqrt{EF-G^2}[\tilde{u}_i, \tilde{v}_i] - \sqrt{EF-G^2}[u_i, v_i]| \leq \frac{\varepsilon}{2C_0|G|}$

где $\rho((\tilde{u}_i, \tilde{v}_i), (u_i, v_i)) < \delta_u$
 (в силу равн. непрерыв. ф-ции)

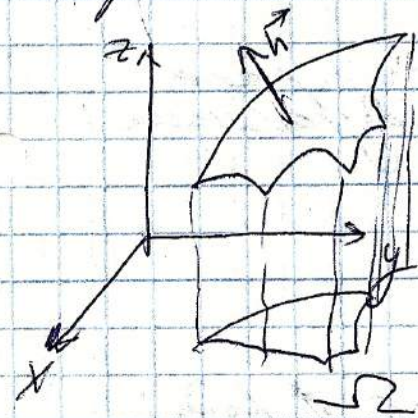
Планирование

$$|G_0(f) - I| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2C_0|G|} \sum_{i=1}^N |f[u_i, v_i]| \underbrace{G_i^*}_{\leq C_0} < \varepsilon$$

Замечание. Пусть задана пов-ть Φ такая, что она однозначно проектируется на координатную плоскость Oxy и, следовательно, явл. "графичекой" ф-цией $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ (иными словами, пов-ть Φ допускает параграфическое представление):

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega$$

$\iint_{\Phi} f(u) \cos z d\sigma$. Выберем вектор нормали к Φ выбран так, что он совпадает с вектором $\vec{e}_z$ с координат. напр. осью Oz .



$$E = |\vec{r}_u|^2 \text{ радиус-вектор} \\ F = |\vec{r}_v|^2 \text{ проекция вектора}$$

$$G = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$$

$$\vec{r} = (u, v, z(u, v))$$

$$\vec{r}_u = (1, 0, z_u); \quad \vec{r}_v = (0, 1, z_v)$$

$$E = 1 + z_u^2; \quad F = 1 + z_v^2$$

$$G = z_u z_v$$

$$\Rightarrow \sqrt{EF-G^2} = \sqrt{(1+z_u^2)(1+z_v^2) - z_u^2 z_v^2} = \sqrt{1+z_u^2+z_v^2}$$

$\cos \theta =$ угол между единичным вект. нормалью

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|} = \sqrt{EF-G^2} \quad (\text{проверка})$$

$$\cos \theta dS = \frac{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|}{\sqrt{EF-G^2}} du dv = du dv$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{vmatrix} = (-z_u, -z_v, 1)$$

$$\iint_Q f(u) \cos \theta d\sigma = \iint_{\Omega} f(u, v, z(u, v)) du dv$$

$$= \iint_{\Omega} f(x, y, z(x, y)) dx dy$$

Для данного поверхностного интеграла
рода используется такое обозначение:

$$\iint_Q f(u) dx dy$$

Для любого поверхностного интеграла # рода:

$$\iint_Q (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \text{обозначение}$$

$$= \iint_Q P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Глава V

Элементарные функции

R^3 : скалярные функции $u = f(x, y, z)$
векторные функции $\vec{u} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

§1 Преобразование базисов и координат
инвариантность

Векторы в R^3 со стандарт. базисом $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Другой базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ называется ортогональным
к $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} \text{ — символ Кронекера}$$

Ув: $\forall$ базиса $\vec{e}$ и $\vec{e}'$ — взаимно ортогональные

$\vec{e}^*$

$$\text{Зам: } \vec{e}_1' = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad \vec{e}_2' = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_3]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

$$\vec{e}_3' = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Векторное разложение $\forall \vec{x} \in R^3$ по базису $\vec{e}(\vec{e}')$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

§2

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{e}_j) = \sum_i x_i (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = x_j$$

"1" $\Rightarrow j=i$
0, $j \neq i$

$$\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}_i \quad (\bar{x}, \bar{e}_j) = \sum_i x_i (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = x_j$$

убл: $\bar{x} = \sum_i (x, \bar{e}_i) \bar{e}_i$

$$\bar{x} = \sum_i (x, \bar{e}_i) \bar{e}_i$$

Применим данное убл к вектору базиса (исх) базиса

$$\bar{e}^k = \sum_i (\bar{e}^k, \bar{e}_i) \bar{e}_i \quad \forall k \quad \text{н. ортонорм. базиса } \bar{e}$$

$$\bar{e}_k = \sum_i (\bar{e}_k, \bar{e}_i) \bar{e}_i \quad \forall k \quad \text{базиса } \bar{e}$$

матрица перехода

$$\Gamma(\bar{e}^*) = ((\bar{e}^k, \bar{e}^i))_{k,i=1}^3$$

$$\Gamma(\bar{e}) = ((\bar{e}_k, \bar{e}_i))_{k,i=1}^3$$

$$\Rightarrow \Gamma(\bar{e}^*) = [\Gamma(\bar{e})]^{-1}$$

Преобразование базиса

$\mathbb{R}^3 \quad \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rightsquigarrow$ новый базис $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$

матрица перехода от базиса $\{\bar{e}\}$ к $\{\bar{f}\}$

$$\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \begin{matrix} \leftarrow \text{выражаем} \\ \text{в координатах} \\ \text{базиса } \bar{e} \end{matrix}$$

матр. перехода

$$\bar{f}_t = \sum_{s=1}^3 b_{ts}^s \bar{e}_s \quad \forall t=1,2,3$$

При таком преобразовании базиса автоматически преобразуется и взаимный базис $\bar{e}^*$

Старые $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ — базисные к $\bar{f}_1$

Запишем матрицу перехода от базисного базиса $\bar{e}^*$ к $\bar{f}^*$

$$\{\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3\} = \{\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\} C$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}^t = \sum_{s=1}^3 c_{st} \bar{e}^s$$

убл $C = B^{-1}$

убл $(\bar{f}^t, \bar{f}^p) = \delta_{tp} = \begin{matrix} \text{до или } \perp \end{matrix}$

$$= \left(\sum_{s=1}^3 c_{st} \bar{e}^s, \sum_{q=1}^3 b_{pq}^q \bar{e}_q \right) =$$

$$= \sum_{s,q=1}^3 c_{st} b_{pq}^q (\bar{e}^s, \bar{e}_q) =$$

$\underbrace{\quad}_{s=q}$

$$\sum_{s=1}^3 c_{st} b_{ps}^s$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^3 c_{st} b_{ps}^s = \delta_{tp} \Rightarrow CB = I, \text{ что}$$

$$\text{Пусть } x \in \mathbb{R}^3, x = \sum_{i=1}^3 x^i \bar{e}_i = \sum_{j=1}^3 y^j \bar{f}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^3 y^j \left(\sum_{s=1}^3 b_j^s \bar{e}_s \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{s=1}^3 y^j b_j^s \bar{e}_s \Rightarrow$$

$$\sum_s x^s \bar{e}_s = \sum_s \left(\sum_i y^i b_i^s \right) \bar{e}_s$$

$$\Rightarrow x^s = \sum_{i=1}^3 y^i b_i^s$$

Справедлива след. ф-ла ~~для~~ преобр коорд.

$$x^s = \sum_i b_i^s y^i \quad \forall s$$

Аналогично для координат-вектора $\bar{f}$ от базисных базисов:

$$x = \sum_i x_i \bar{e}^i = \sum_j y_j \bar{f}^j$$

$$\Rightarrow x_i = \sum_j c_j^i y_j, \text{ где } c = (c_j^i) - \text{матр. перехода}$$

$$B = c^{-1} \Rightarrow y_j = \sum_s b_j^s x_s$$

Инварианты мн. от. в $\mathbb{R}^3$

Рассм. $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ - мн. от.

~~не~~ не зависит от выбора базиса

$$\text{Уб. Верно } \sum_i (\alpha \bar{e}_i, \bar{e}^i)$$

не зависит от выбора e в $\mathbb{R}^3$

Д-во. Рассмотрим мн. от. базис f в $\mathbb{R}^3$

$$\sum_i (\alpha \bar{f}_i, \bar{f}^i) = \sum_i (\alpha (\sum_{j=1}^3 b_i^j \bar{e}_j), \sum_{s=1}^3 c_s^i \bar{e}^s)$$

(матр. перехода)
B и C

$$= \sum_{i,j,s} (b_i^j \alpha \bar{e}_j, c_s^i \bar{e}^s) = \sum_{i,j,s} b_i^j c_s^i (\alpha \bar{e}_j, \bar{e}^s)$$

$$= \sum_{j,s} (\alpha \bar{e}_j, \bar{e}^s) \cdot \sum_i b_i^j c_s^i =$$

$$= \sum_j (\alpha \bar{e}_j, \bar{e}^j)$$

Замечание 1. Т.к. исходный базис e базисный к $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, то

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha \bar{e}_i, \bar{e}^i) \text{ удовн. убв. 1.}$$

Зам 2 Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - ортонорм. базис в $\mathbb{R}^3$. Он сам себе базисный (т.е. ортонорм. б.).

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij} \text{ тогда}$$

$$\alpha \bar{e}_1 = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = (\alpha \bar{e}_1, \bar{e}_1) \text{ т.к. на кол-во } \delta, \text{ то } \alpha_1 =$$

$$\Rightarrow (\alpha \bar{e}_1, \bar{e}_1) = \alpha_1$$

$$(\alpha \bar{e}_2, \bar{e}_2) = \alpha_2 \quad \left. \begin{array}{l} (\alpha \bar{e}_3, \bar{e}_3) = \alpha_3 \end{array} \right\} \text{ Аналогично}$$

$$(\alpha \bar{e}_3, \bar{e}_3) = \alpha_3$$

9)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 (\alpha \bar{e}_i, \bar{e}_i) = \text{tr} A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

(или $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$)

= сумма α с учетом ан. кр.

Убедимся, что $\sum_{i=1}^3 [\bar{e}_i, \alpha \bar{e}_i]$ не зависит от выбора базиса

$$\sum_i [\bar{f}_i, \alpha \bar{f}_i] = \left| \begin{array}{l} \bar{f}_i = \sum_k \bar{e}_i^k \bar{e}_k \\ \bar{f}^i = \sum_s \bar{e}_s^i \bar{e}_s^s \\ BC = I \end{array} \right.$$

$$= \sum_{i,k,s} \bar{e}_i^k \bar{e}_s^i [\bar{e}_k, \alpha \bar{e}_s^s] = \sum_{k,s} [\bar{e}_k, \alpha \bar{e}_s^s] \cdot \sum_i \bar{e}_i^k \bar{e}_s^i = \sum_k [\bar{e}_k, \alpha \bar{e}_k], \text{ так как}$$

Зам. Если базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - ОНБ и параллелен

$$\sum_k [\bar{e}_k, \alpha \bar{e}_k] = 0$$

$$\alpha \bar{e}_1 = \alpha_{11} \bar{e}_1 + \alpha_{21} \bar{e}_2 + \alpha_{31} \bar{e}_3$$

(или $\alpha_{11} \bar{e}_1 + \alpha_{21} \bar{e}_2 + \alpha_{31} \bar{e}_3$)

$$\Rightarrow [\bar{e}_1, \alpha \bar{e}_1] = \alpha_{21} [\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \alpha_{31} [\bar{e}_1, \bar{e}_3]$$

(или $\alpha_{21} [\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \alpha_{31} [\bar{e}_1, \bar{e}_3]$)

т.е. - спаривания, взаимно

$$\alpha \bar{e}_2 = \alpha_{12} \bar{e}_1 + \alpha_{22} \bar{e}_2 + \alpha_{32} \bar{e}_3$$

$$[\bar{e}_2, \alpha \bar{e}_2] = \alpha_{12} [\bar{e}_2, \bar{e}_1] + \alpha_{32} [\bar{e}_2, \bar{e}_3]$$

(или $\alpha_{12} [\bar{e}_2, \bar{e}_1] + \alpha_{32} [\bar{e}_2, \bar{e}_3]$)

$$\alpha \bar{e}_3 = \alpha_{13} \bar{e}_1 + \alpha_{23} \bar{e}_2 + \alpha_{33} \bar{e}_3$$

$$[\bar{e}_3, \alpha \bar{e}_3] = \alpha_{13} [\bar{e}_3, \bar{e}_1] + \alpha_{23} [\bar{e}_3, \bar{e}_2]$$

(или $\alpha_{13} [\bar{e}_3, \bar{e}_1] + \alpha_{23} [\bar{e}_3, \bar{e}_2]$)

$$\Rightarrow \sum_k [\bar{e}_k, \alpha \bar{e}_k] = (\alpha_{21} \bar{e}_3 - \alpha_{31} \bar{e}_2) + (\alpha_{12} \bar{e}_3 + \alpha_{32} \bar{e}_1) + (\alpha_{13} \bar{e}_2 - \alpha_{23} \bar{e}_1) =$$

$$= (\alpha_{32} - \alpha_{23}) \bar{e}_1 + (\alpha_{13} - \alpha_{31}) \bar{e}_2 + (\alpha_{21} - \alpha_{12}) \bar{e}_3$$

Если оператор α самосопряженный (т.е. симметрическая мат.)

$$\Rightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

$$\Rightarrow \sum_k [\bar{e}_k, \alpha \bar{e}_k] = 0$$

Опр 1 $\sum (\bar{e}_i, \alpha \bar{e}_i)$ - дивергенция оператора α (div α)

Опр 2 Вектор

$$\sum_i [\bar{e}_i, \alpha \bar{e}_i] - \text{рот} \alpha \text{ (rot } \alpha)$$

§2 Основы операций и понятия теории поля

$\varphi(u) = u(x, y, z) \equiv u(M) \in \mathbb{R}^3$ — скалярное поле в $\mathbb{R}^3$ в каждой точке $\mathbb{R}^3$

$\vec{p} = \vec{p}(x, y, z) \equiv \vec{p}(M) = \{p, q, r\}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$
вект. ф-ция

1° Дифференцируемое скалярное поле

$M_0 \in \mathbb{R}^3$, её радиус-вектор $\vec{r}_0$ (у нас фикс. $\sigma \in \mathbb{R}^3$)

$M \in \mathbb{R}^3$, её рад-вект $\vec{r}$

Приращение скал. поля $u(M)$ в т. M_0 :

$$\Delta u(M_0) = u(M) - u(M_0)$$

Вот в приращение «аргумента»

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Опр. ска. поле $u(M)$ называется дифференцируемым в т. M_0 , если справедливо представление:

$$(1) \Delta u(M_0) = (\vec{g}, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|), \quad |\Delta \vec{r}| \rightarrow 0,$$

в кот. $\vec{g}$ — не зависит от т. M

Усл. Вектор $\vec{g}$ в (1) определяется однозначно

$$\text{Д-во: Пусть } \exists \vec{h} \quad \Delta u(M_0) = (\vec{h}, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|)$$

$$\Rightarrow (\vec{g}, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|) = (\vec{h}, \Delta \vec{r}) + \bar{o}(|\Delta \vec{r}|)$$

$$\Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \Delta \vec{r}) = \bar{o}(|\Delta \vec{r}|) \quad | : |\Delta \vec{r}|$$

$$\Rightarrow \left(\vec{g} - \vec{h}, \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \right) = \bar{o}(1) \quad \begin{matrix} \text{зависит от } \vec{r} \\ \Delta / |\Delta \vec{r}| \rightarrow 0 \end{matrix}$$

единичного длины, нег предела



Будем считать, что переход к пределу $|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$ происходит так,

что $\Delta \vec{r} \uparrow \vec{e}$, где $\vec{e}$ — фикс. вектор

Тогда в последнем равенстве:

$$(\vec{g}, \vec{e}) + \bar{o}(1) = (\vec{h}, \vec{e})$$

$$\Leftrightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \vec{e}) = \bar{o}(1) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{зависит от } M \end{matrix} \quad |\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$$

$$(\vec{g} - \vec{h}, \vec{e}) = 0 \quad \forall \vec{e} \text{ — единичного вектора}$$

$$\Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \vec{g} = \vec{h} \quad (\Rightarrow \text{и для любого вект. } \vec{v} \text{ в } \mathbb{R}^3)$$

$$(\Rightarrow (\vec{g} - \vec{h}, \vec{g} - \vec{h}) = 0 \Leftrightarrow \vec{g} - \vec{h} = 0)$$

Опр Вектор $\vec{g}$ на градиентном поле $u(\mu)$

$$\vec{g} = \text{grad } u$$

Если ск. поле $u(\mu)$ диф-ем в $V \ni \mu_0$
 $\in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$\forall \mu_0 \in \Omega$ определен вектор градиента $\text{grad}(u(\mu_0))$, иными словами,

$\text{grad } u$ - некоторое векторное поле в Ω

Представление (1) можно переписать:

$$\Delta u(\mu_0) = (\text{grad}[u(\mu_0)], \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|), |\Delta \vec{r}| \Rightarrow 0$$

дифференциал u в т. μ_0

Упр 2 Пусть $u(\mu), v(\mu)$ диф. ск. поля в Ω , тогда:

$$\text{grad}(u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v \text{ (линейность)}$$

$$(2) \text{ grad}(uv) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u \text{ (у, v - скал. ф-ции)}$$

$$\text{grad}(u/v) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2} \quad (v(\mu_0) \neq 0)$$

$$\text{grad}[F(u)] = F'(u) \text{ grad } u \quad F(t) - \text{диф-мая ф-ция}$$

ф-ция одной переменной, u - скал. ф-ция

Д-во (линейные комбинации не играют роли)

$$\begin{aligned} \Delta(uv)(\mu_0) &= (u(\mu) - u(\mu_0))v(\mu) + u(\mu_0)(v(\mu) - v(\mu_0)) = \\ &= \Delta u(\mu_0)v(\mu) + \Delta v(\mu_0)u(\mu_0) = \end{aligned}$$

$$= \text{grad } u(\mu_0) (\text{grad}[u(\mu_0)], \Delta \vec{r}) v(\mu) +$$

$$+ \bar{O}(|\Delta \vec{r}|) v(\mu) + u(\mu_0) (\text{grad}[v(\mu_0)], \Delta \vec{r}) +$$

$$+ \bar{O}(|\Delta \vec{r}|) u(\mu_0) = (v(\mu_0) + (\text{grad } v(\mu_0), \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|)) \cdot (u(\mu_0) + (\text{grad } u(\mu_0), \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|))$$

если $|\Delta \vec{r}| \leq 1$

$$\Rightarrow \bar{O}(|\Delta \vec{r}|)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(uv) &= (\text{grad } u(\mu_0), \Delta \vec{r}) (v(\mu_0) + (\text{grad } v(\mu_0), \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|)) + \\ &+ u(\mu_0) (\text{grad } v(\mu_0), \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|) = \end{aligned}$$

$$= (\text{grad } u(\mu_0), \Delta \vec{r}) v(\mu_0) + (\text{grad } u(\mu_0), \Delta \vec{r}) \cdot (\text{grad } v(\mu_0), \Delta \vec{r}) + u(\mu_0) (\text{grad } v(\mu_0), \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|)$$

по формуле Буняковского ???

$$= (\text{grad } u(\mu_0) + \text{grad } v(\mu_0), \Delta \vec{r}) + \bar{O}(|\Delta \vec{r}|) = \text{grad } uv(\mu_0), \Delta \vec{r}.$$

(94)

Пусть $u(M)$ - скал. поле, $M_0 \in \mathbb{R}^3$, $\vec{e}$ - ед. вектор

$u(M) - u(M_0)$
 $\uparrow$
 разн. разн.
 $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{e}$
 $t > 0$

Опр Если $\exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{u(M) - u(M_0)}{t}$, то он называется производной $u(M)$ в т. M_0 по направлению $\vec{e}$
 Обозначение: $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0)$

Ув. 3 Если $u(M)$ дифференцируемо в т. M_0 , то $u(M)$ имеет в т. M_0 производную по любому направлению, причем:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = (\text{grad } u(M_0), \vec{e})$$

До-во: $u(M) - u(M_0) = (\text{grad } u(M_0), \Delta \vec{r}) + o(|\Delta \vec{r}|)$

Для производной по какому-то направлению $\vec{e}$:
 (единичный)

$$\Delta \vec{r} = t\vec{e}, t > 0$$

$$\Rightarrow u(M) - u(M_0) = (\text{grad } u(M_0), t\vec{e}) + o(t)$$

$$\Rightarrow \frac{u(M) - u(M_0)}{t} = (\text{grad } u(M_0), \frac{t\vec{e}}{t}) + o(1), t \rightarrow 0+0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{u(M) - u(M_0)}{t} = (\text{grad } u(M_0), \vec{e}), \text{ что и требовалось.}$$

Пусть $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ задан о.н.б. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\begin{aligned} \text{grad } u(M_0) &= \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \\ &= (\text{grad } u(M_0), \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\text{grad } u(M_0), \vec{e}_2) \vec{e}_2 + \\ &+ (\text{grad } u(M_0), \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \\ \text{Ув. 2} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{e}_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial \vec{e}_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial \vec{e}_3} \vec{e}_3 &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Ув. 4 В о.н.б. $\mathbb{R}^3$:

$$\text{grad } u(M_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right\}$$

2° Дифференцируемое векторное поле

Пусть $\vec{p}(M) \in \mathbb{R}^3$, $M_0 \in \mathbb{R}^3$, $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$

Опр Вект. поле называется дифференцируемым в т. M_0 , если

$$\Delta \vec{p}(M_0) \equiv \vec{p}(M) - \vec{p}(M_0) = A \Delta \vec{r} + o(|\Delta \vec{r}|)$$

вектор $|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$

где A - лине. оп. в $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и не зависящий от т. M (и M_0)

вектор $\vec{R}(\Delta \vec{r}) = o(|\Delta \vec{r}|)$, $|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$, если

$$\lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{|\vec{R}(\Delta \vec{r})|}{|\Delta \vec{r}|} = 0$$

Ув. 5 Оператор A в этом представлении определяется однозначно

До-во: По определению для $\vec{p}(M) - \vec{p}(M_0)$:

$$A \Delta \vec{r} + o(|\Delta \vec{r}|) = B \Delta \vec{r} + o(|\Delta \vec{r}|), \text{ где } \Delta \vec{r} = \vec{e}t$$

тогда $t\alpha\bar{e} + t\bar{o}(1) = t\beta\bar{e} + t\bar{o}(1) \quad (\div t \quad (t > 0))$

$\alpha\bar{e} + \bar{o}(1) = \beta\bar{e} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \alpha\bar{e} = \beta\bar{e} \Leftrightarrow$
 Мультиплицируем

$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)\bar{e} = \bar{0} \quad \forall \text{ ед. } \bar{e} \Rightarrow$
 и на модуль вектор
 (в линейности)
 $\Rightarrow \alpha = \beta$

Опр Производная $\bar{p}(M)$ в т. M_0 по
 напр. ед. вект. $\bar{e}$ на $\bar{p}$.

Вм $\frac{\bar{p}(M) - \bar{p}(M_0)}{t} \left(\equiv \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}} \right)$, где $\bar{r}_M - \bar{r}_{M_0} = t\bar{e}$
 $t \rightarrow 0$

Утв 6 Если $\bar{p}(M)$ дифференцируема в т. M_0
 то $\exists \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}} (\forall \bar{e})$ и $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}} = \alpha\bar{e}$

До-до $\Delta \bar{e} = t\bar{e}, t > 0, |\Delta \bar{e}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0+0$

$\Rightarrow \bar{p}(M) - \bar{p}(M_0) = \alpha(t\bar{e}) + \bar{o}(t) \quad (|\bar{e}| = 1)$

$\Rightarrow \frac{\bar{p}(M) - \bar{p}(M_0)}{t} = \alpha\bar{e} + \frac{\bar{o}(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \bar{0} \Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}} = \alpha\bar{e}$

Пусть в $\mathbb{R}^3$ орт/норм базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$
 и коорд. вект. поле $\bar{p}(M)$ в этой
 базе

$\bar{p}(M) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$

Оператор α характеризуется своей
 матрицей A_α
 тк. базис ортонорм $\Rightarrow$ в столбцах;

~~A_α~~ $A_\alpha = \begin{pmatrix} | & | & | \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ & & \end{pmatrix}$
 $A_\alpha, A_{\bar{e}_2}, A_{\bar{e}_3}$
 координаты

$\alpha\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}_1} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x} \right\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x} \right\}$
 (у-б.б.)

$A_{\bar{e}_2} = \dots \quad A_{\bar{e}_3} = \dots$

$A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}$
 $(A_{\bar{e}_1}) \quad (A_{\bar{e}_2}) \quad (A_{\bar{e}_3})$

Опр Дивергенция вект. поля $\bar{p}$
 равенс. дивергенция α .
 Поле $\bar{p}$ - поле α

$\text{div } \bar{p}$ (скалар) $\text{rot } \bar{p}$ (вектор)

Важно! Для $\text{div } \bar{p}, \text{rot } \bar{p}$ в окр $\mathbb{R}^3$
 $\checkmark \text{div } \bar{p} = \text{div } \alpha = (\bar{e}_1, \alpha\bar{e}_1) + (\bar{e}_2, \alpha\bar{e}_2) + (\bar{e}_3, \alpha\bar{e}_3) =$
 $= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

$\checkmark \text{rot } \bar{p} = \text{rot } \alpha = [\bar{e}_1, \alpha\bar{e}_1] + [\bar{e}_2, \alpha\bar{e}_2] + [\bar{e}_3, \alpha\bar{e}_3] =$
 $= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{e}_1 + \left(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{e}_3$

(уравнения компоненты с x, y, z)

$$[\bar{e}_1, A\bar{e}_1] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial x} \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial R}{\partial x} \bar{e}_2 - \frac{\partial Q}{\partial x} \bar{e}_3\right)$$

$$[\bar{e}_2, A\bar{e}_2] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial R}{\partial y} \bar{e}_1 - \frac{\partial P}{\partial y} \bar{e}_3$$

$$[\bar{e}_3, A\bar{e}_3] = -\left(\frac{\partial Q}{\partial z} \bar{e}_1 - \frac{\partial P}{\partial z} \bar{e}_2\right)$$

Векторное поле $\nabla F = \bar{e}_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \bar{e}_2 \frac{\partial F}{\partial y} + \bar{e}_3 \frac{\partial F}{\partial z}$

оператор ∇ (градиент)

$$(\nabla, \bar{p}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

" $(\bar{e}_1 P + \bar{e}_2 Q + \bar{e}_3 R)$

$$[\nabla, \bar{p}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial z} R \equiv \frac{\partial R}{\partial z}$$

свойство векторного поля

$$= \bar{e}_1 \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \bar{e}_2 \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \bar{e}_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

③ Свойства операторов теории полей

$u = u(x)$ - скал. поле $\Rightarrow \text{grad } u$ - вект. поле $\Rightarrow \text{rot}(\text{grad } u) = 0$

$\bar{p} = \bar{p}(x)$ - вект. поле $\Rightarrow \text{div } \bar{p}$ - скал. н $\Rightarrow \text{grad}(\text{div } \bar{p})$

$\text{rot } \bar{p}$ - вект. н $\Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \bar{p})$

оп-ция $\nabla \times \nabla \times \bar{p} = \nabla(\text{div } \bar{p}) - \Delta \bar{p}$

Лемма 7 $\text{rot}(\text{grad } u) \equiv 0, \text{div}(\text{rot } \bar{p}) \equiv 0$

Д-во. В ОНБ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} (= \nabla u)$$

$$\text{rot}(\text{grad } u) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) + 0 = 0$$

2-й и 3-й столбцы

$$\text{div}(\text{rot } \bar{p}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$$

Лемма 8: $\text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u$

оператор Лапласа

Д-во $\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$

$$\Rightarrow \text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

Лемма 9 $\text{rot}(\text{rot } \bar{p}) =$

$$\text{Д-во } \text{rot}(\text{rot } \bar{p}) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_y - Q_z & R_z - P_x & Q_x - P_y \end{vmatrix} =$$

97

$$= \bar{e}_1 (Q_{xy} - P_{yy} - (-R_{xz} + P_{zz})) - \bar{e}_2 (Q_{xx} - P_{xy} - (R_{yz} - Q_{zz})) + \bar{e}_3 (-R_{xx} + P_{xz} - (R_{yy} - Q_{yz}))$$

$$= \bar{e}_1 (-P_{yy} - P_{zz}) + \bar{e}_2 (-Q_{xx} - Q_{zz}) + \bar{e}_3 (-R_{xx} - R_{yy}) + \bar{e}_1 (Q_{xy} + R_{xz}) + \bar{e}_2 (P_{xy} + R_{yz}) + \bar{e}_3 (P_{xz} + Q_{yz}) =$$

$$= -\bar{e}_1 (\Delta P) - \bar{e}_2 (\Delta Q) - \bar{e}_3 (\Delta R) +$$

$$+ \bar{e}_1 (Q_{xy} + R_{xz} + P_{xx}) + \bar{e}_2 (P_{xy} + R_{yz} + Q_{yy}) + \bar{e}_3 (P_{xz} + Q_{yz} + R_{zz}) =$$

$$= -(\bar{e}_1 \Delta P + \bar{e}_2 \Delta Q + \bar{e}_3 \Delta R) + \bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} (P_x + Q_y + R_z) + \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} (P_x + Q_y + R_z) + \bar{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} (P_x + Q_y + R_z) =$$

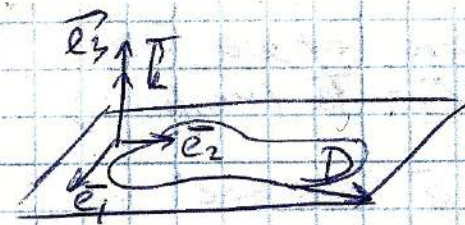
$$= \text{grad}(\text{div} \vec{p}) - \Delta \vec{p}, \text{ т.д.}$$

Глава 6

Р-теорема, Грина, Остроградского-Гаусса

Пусть π -плоскость в $\mathbb{R}^3$ $\vec{k}$ -вектор нормаль к π ($|\vec{k}|=1$),

D -односвязная обл на π



(D односвязна, если $\forall$ контура $C \subset D$ обл. D_0 с границей $\partial D_0 = C : D_0 \subset D$) (Кейс 2-й)

Доп. усл. на D :

1) $\partial D \equiv C$ - кус-линейная кривая без узлов

2) $\exists$ прям. ден ск на π : любая прямая, $\parallel$ -ная какому-то из осей координат, пересекала C не более, чем в 2х точках.

Теор 1 Пусть выполнены все условия на D и пусть $\vec{a}$ -векторное поле, заданное на D , дифференцируемое в D , и такое, что $\vec{a}$ нормально к π и производная $\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}}$ перп. в D к направлению $\vec{e}$ с замыканием границей

Справедлива ф-ла (Грина)

$$\iint_D (\text{rot} \vec{a}, \vec{k}) d\sigma = \oint_C (\vec{a}, \vec{t}) dl, \text{ где } \vec{t} \text{ - вект. касат. к } C \text{ в н-м } \pi \text{ и}$$

соглаован с вект. $\vec{k}$ (смотрим сверху, вход контура - слева)

(п.2) - поток потока $\vec{a}$ через D

(п.1) - циркуляция $\vec{a}$ вдоль C

2-6. В $\mathbb{R}^3$ введем взаимно перпен. осн. век. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ так, чтобы $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ (на рис.)

в силу того, что век. поле $\vec{a}$ "плоское" (коммутаторы 0)

$$\vec{a} = \{P, Q, 0\} = P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2$$

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{e}_2 \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$(\text{rot } \vec{a}, \vec{e}_3) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\vec{t} = \{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\}$$

$$(\vec{a}, \vec{t}) = P \cos \alpha + Q \sin \alpha$$

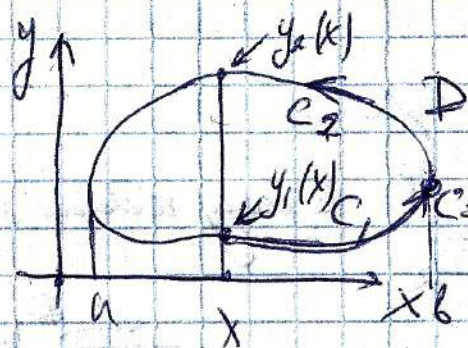
$$\Rightarrow \oint_C (\vec{a}, \vec{t}) d\ell = \oint_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) d\ell \stackrel{\substack{\text{ортогональн.} \\ \text{компл.}}}{=} \oint_C P dx + Q dy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy \quad (*) \leftarrow \text{надо до-}$$

Докажем по отдельности 2 формулы:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx$$



$$\bar{D}: a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

$\iint_D f dx dy$ - определена, если функция f непрерывна на $\bar{D}$

$\iint_D f dx dy$ - существует, если область D -

$$1. z = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= -\int_a^b dx (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) =$$

$$= \underbrace{\int_a^b P(x, y_1(x)) dx}_{\text{по } C_1} - \underbrace{\int_a^b P(x, y_2(x)) dx}_{\text{по } C_2} =$$

интеграл по направлению

$$= \oint_C P(x, y) dx \quad \text{Аналогично 2-ой интеграл}$$

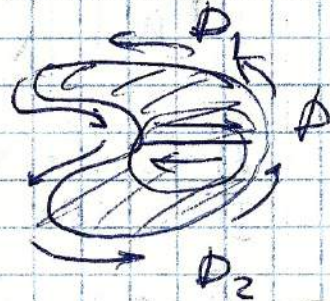
Зам 1. Гов. т. 1. справедливо и в случае, когда обл. D можно разбить на конечное число частей $D = \bigcup D_i$, каждая из которых удовлетв. усл. т. 1.



1.2. Ф-ла Грина

$$\iint_D \dots = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \text{ в силу аддитивности}$$

Пр. 2. Ф-ла Грина



$$\oint + \oint$$

$$\partial D_1, \partial D_2$$

Зам 2 В усл т.1. можно отбросить
требования 2 на ∂D и оставить
только "внутр-г. кривая ∂D ориентирована"
(используем - с.2)

Зам 3 Ф-ла Грина справедлива в обл.
 D со спрямляемой границей ∂D (1980)

Зам 4 В требованиях на ~~не~~ гладкость
вект. поля $\vec{a}$ можно ослабить:
 $\vec{a}$ непрерывен в $D \cup \partial D$, $\vec{a}$ непрерывно дифф.
в D (и пропущено непрерывно в D) -

Зв. интеграл в Ф-ле Грина понимается
в смысле (ср. 3, вып. 1)

§2 Ф-ла Остроградского-Гаусса

В R^3 - односвязная обл. D , $S = \partial D$ -
поверхность, кот.

1) S - двусторонняя отр., кусочно-гл., полная,
замкн., без особых точек

2) $\exists$ ДДСК в R^3 ; $\forall$ прям., //
оси коорд., пересекает S не более,
чем в 2-х т.

Пусть $\vec{n} = \vec{n}(M)$ - вekt. со. внешн. нормали
к S'

Пусть $\vec{a}$ - вekt. поле, определ. в окр. $\cup$
дифф. в $D \cup S$, $\forall \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}}$ непрерывно в $D \cup S$.

Теор. 2 При выпн. этих усл.

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{a} dV = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$$

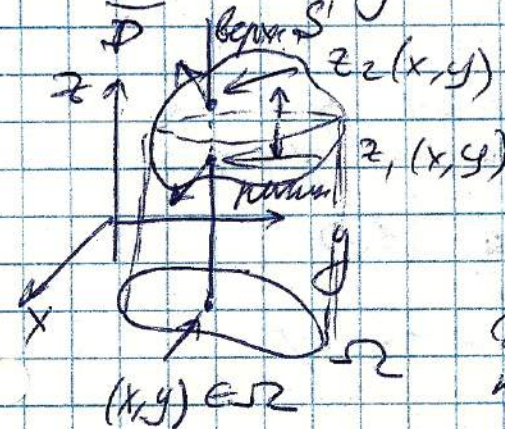
поток $\vec{a}$ через S'

Д-во: расем $Oxyz$, удовл. 2)
тогда $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$

$$\begin{aligned} \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iint_S (P \cos \alpha + \\ &+ Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iint_S (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) \end{aligned}$$

Д-во, каноническое

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dx dy$$



$$D: (x, y) \in \Sigma$$

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

Формула в л. части
показывает, что
к повт. интегралу

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\bar{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\Sigma} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\
 &= \iint_{\Sigma} dx dy (R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))) = \\
 &= \iint_{\Sigma} R(x,y,z_2(x,y)) dx dy - \iint_{\Sigma} R(x,y,z_1(x,y)) dx dy, \\
 &= \iint_{S_B} R \cos \tau d\sigma + \iint_{S_H} R \cos \tau d\sigma
 \end{aligned}$$

Зам 1 Ф-ка 0-т верна и в обл D , кот. конечными кусками поверхностей можно разб на обл.

$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i, \text{ где } D_i \text{ удовл. тем же усл. т.з.}$$

$$\iiint_{\bar{D}} = \iiint_{\bar{D}_B} + \iiint_{\bar{D}_H} \quad \text{нормали противоположны}$$

Зам 2 от предваний 2 на ∂D можно отказаться.

Зам 3 можно ослабить усл. на вект. поле $\bar{a}$, заменив крив-н

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}} \text{ в } D \text{ на крив } \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}} \text{ в } D$$

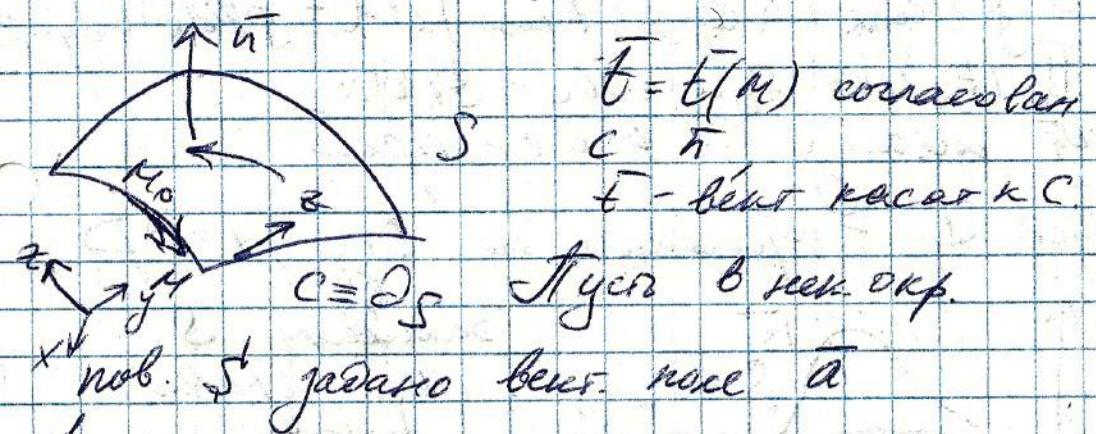
(или в неособев. смысле)

§3 Ф-ка Стокса

Пусть S - кусок нормы, оор, кус-н пов. в $\mathbb{R}^3$ выделен τ .

$C = \partial S'$ - кус-н. контур в $\mathbb{R}^3$,

$\bar{n} = \bar{n}(M)$ - ед. вектор норм к S'



Получим дополнительно: $\exists$ ПДСК в $\mathbb{R}^3$: пов-н S однозначно проецируется на V коорд. п-н

$$\text{Теор 3} \quad \text{Если } \bar{a} \text{ - крив. дифф в окр. } S', \\ \iint_S (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}) d\sigma = \oint_C (\bar{a}, \bar{\tau}) dl \\ \text{(Ф-ка Стокса)}$$

D -во раскл. ПДСК Ox, y, z удовл. усл. перед т.з. $\bar{a} = \{P, Q, R\}$,

$$\bar{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}, \quad \bar{\tau} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{rot } \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \{R_y - Q_z, -P_x + R_z, \\
 &\quad Q_x - P_y\}
 \end{aligned}$$

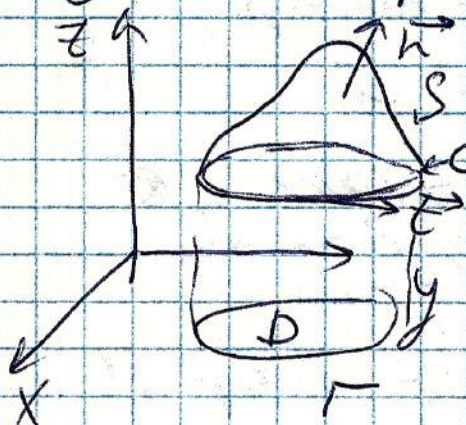
Ф-на Грина

$$\iint_S (R_y - Q_z) \cos \alpha + (-R_x + P_z) \cos \beta + (Q_x - P_y) \cos \gamma d\sigma =$$

$$= \oint (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl = \oint (P dx + Q dy + R dz)$$

Где $\cos \alpha = \frac{P_z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $\cos \beta = \frac{Q_z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $\cos \gamma = \frac{R_z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

Где D - проекция на Oxy , $\Gamma = \partial D$



Заданым S
как график
функции
 $z = z(x, y)$
 $(x, y) \in D$

$$\vec{n} = \frac{[\vec{e}_x, \vec{e}_y]}{|[\vec{e}_x, \vec{e}_y]|}$$

$$\begin{cases} z = z(x, y) \\ x = x \\ y = y \end{cases}$$

$(\vec{n}, \vec{e}_z)$ - угол

$$\vec{e} = \{x, y, z\} \Rightarrow \vec{e}_x = \{1, 0, z_x\},$$

$$\vec{e}_y = \{0, 1, z_y\}$$

$$[\vec{e}_x, \vec{e}_y] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = \{-z_x, -z_y, 1\}$$

$$|[\vec{e}_x, \vec{e}_y]| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

$$\cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

$$d\sigma = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

$\Rightarrow$ Итого получаем:

$$\iint_D (P_z \cdot (-z_y) - P_y \cdot 1) dx dy =$$

$$= - \iint_D (P_z z_y + P_y) dx dy = (*)$$

Подставим: $\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) =$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow (*) = - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy =$$

{Ф-на Грина}

$$= \oint_{\Gamma} P(x, y, z(x, y)) dx = (*)$$

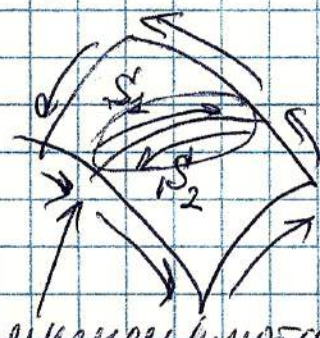
т.к. $(x, y) \in \Gamma \Rightarrow (x, y, z(x, y)) \in C$

$$(*) = \oint_C P(x, y, z) dx, \text{ т.д.}$$

Замечание 1 Перед усл. 1.3 мы предположили, что мн-во S' однозначно проектируется на малую координатную плоскость мн-ва. Вспомогательная S' ПДСК

Однако не трудно показать, что ф-ла Стокса верна, если

$S' = \bigcup_{i=1}^N S_i$, S_i удовл. усл. одностороннего проектирования



$$\begin{aligned} \iint_{S_1 \cup S_2} (\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a}) d\sigma &= \\ &= \iint_{S_1} (\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a}) d\sigma + \iint_{S_2} (\bar{n}, \operatorname{rot} \bar{a}) d\sigma \\ &= \oint_{\partial S_1} (\bar{a}, \bar{\tau}) dl + \oint_{\partial S_2} (\bar{a}, \bar{\tau}) dl = \\ &= \oint_S (\bar{a}, \bar{\tau}) dl \end{aligned}$$

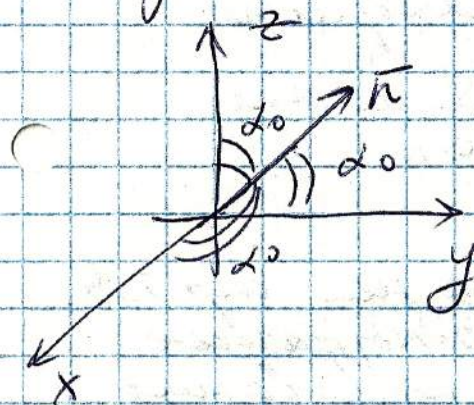
ЗНОДПВОТ

Вспомогательно показав, что можно замкнуть полную окр. второго мн-ва S' без осечек. Можно разбить на кон. многоугольники

$S' = \bigcup_{i=1}^N S_i$, удовл. тому усл.

Действительно!

3) П.к. $\bar{n} = \bar{n}(M)$ для кривой, то в точках поверхности $M_0 \in S' \exists$ окр., в пределах кот. все векторы нормали $\bar{n}(M)$ образуют острый угол с $\bar{n}(M_0)$ ($\alpha < \pi/6$)



$\bar{n}(M_0)$ образует равные острые углы с каждой осью координат (α_0)

$$\bar{n}(M_0) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\cos \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \pi/6 \Rightarrow \alpha_0 > \pi/6$$

т.е. в пределах окр-ти т. M_0 все $\bar{n}(M)$ образуют с $\bar{n}(M_0)$ угол $\alpha < \pi/6$

$\Rightarrow$ Все указанная окр. удовл. указанному усл. — однозначно проектируется на м-во

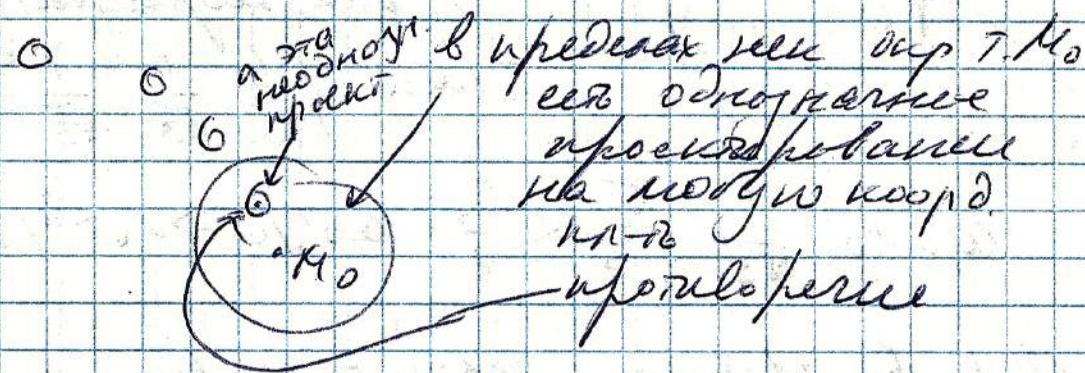
2) Из пункта 1 следует, что каждая т. пов-ти M_0 обладает свойством определенно размера $\delta(M_0)$, кот. однозначно проектируется на малую координатную м-во

Докажем, что $\exists \delta > 0$, что любая т. пов-ти S' размера, меньшего δ , однозначно проектируется (03)

на каждую координатную ось
 Действительно: пусть это не так $\Rightarrow$

$\forall \delta_n = \frac{1}{n}$ $\exists$ такое n_0 и δ_{n_0}
 $\delta_{n_0} \subset \delta$, n_0 не удовн. указанной
 усл.

Пусть $M_n \in \delta_n$ и рассмотрим
 посл-во точек $\{M_n\} \subset \delta$ - полная
 замкн. о-р. $\Rightarrow \exists$ подпол.
 $\{M_{k_n}\} \rightarrow M_0 \in \delta$



3) В силу "универсальности" типа

$\delta \rightarrow 0$ для всех точек $S \Rightarrow$

$S' = \bigcup_{i=1}^N S_i$, S_i - размеры $< \delta$

84) Некоторые приложения

10) Вычисление площадей и объёмов

а) Ф-ла Остроградского-Гаусса:
 $P \equiv x, Q \equiv y, R \equiv z$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iiint_V (1+1+1) dx dy dz =$$

$$= 3 \iiint_V dx dy dz = 3V(V) = 3|V|$$

с др. формой

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iint_{\partial V} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

$$\Rightarrow |V| = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$$

б) Ф-ла Грина $Q \equiv x, P \equiv -y$

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S} P dx + Q dy$$

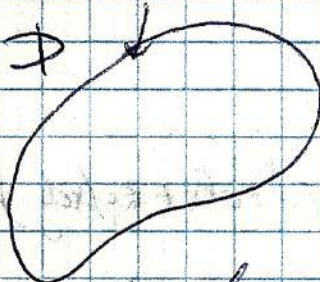
$$\Rightarrow 2 \iint_S dx dy = \oint_S x dx - y dy$$

$$\Rightarrow |S'| = \frac{1}{2} \oint_S x dx - y dy$$

↑
площадь
нов. тн

2° Неравенство интеграла второго
рода от "нуля" интегрирования

Теор 4 Пусть $P(x, y), Q(x, y)$ - крив. в одн. D
 Тогда следующие усл.
 эквив:



1) $\forall$ замкнутой кривой
 (любого вида, кусочно-гладкой,
 но, возможно, с самопересечениями):

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0 \quad (\Gamma \subset D)$$

2) $\forall$ точек $A, B \in D$ значение
 интеграла

$$\int_L P dx + Q dy, \text{ где } L \text{ соединяет}$$

точки A и B

(L явл. кусочно-гладкой кривой без
 самопересечений) не зависит от
 выбора L , а может зависеть
 только от A и B

3) $\exists$ такая дифференцируемая
 ф-ция $u = u(x, y)$

$$du = P dx + Q dy$$

$[P dx + Q dy] \equiv$ эвл. полной диф-ому

Для того $\int P dx + Q dy = u(B) - u(A)$

Д-во: 1) $\Rightarrow$ 2)
 $\Downarrow$
 3)

$1 \Rightarrow 2$ Рассмотрим $\forall$ т. $A, B \in D$ и
 соединим их двумя кривыми
 L_1 и L_2



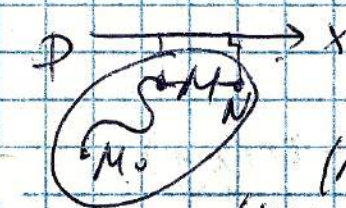
Тогда из этих L_1 и L_2
 образуется замкнутый
 контур $\Gamma = L_1 \cup L_2$

т. A и B в цепи (1)

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0 \Rightarrow \int_{L_1} (P dx + Q dy) -$$

$$- \int_{L_2} (P dx + Q dy) = 0$$

$2 \Rightarrow 3$ Рассмотрим произв. т. $M_0 \in D$ и функ. ее
 Тогда $\forall M \in D$ интегрируем



$$\int_{(M_0 M)} P dx + Q dy = f(M) - f(M_0)$$

" и равно ее
 $u(M)$

$M_0 \parallel dx$ (каким бы ни
 был контур, 2)

Покажем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = P(M)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = Q(M)$$

$$u(x, y) \Rightarrow u(x+h, y)$$

$$\Delta u = u(N) - u(M) = \cancel{u(x+h, y) - u(x, y)}$$

$$= u(x+h, y) - u(x, y)$$

ср. значение

$$= \int_{(M, MN)} P dx + Q dy - \int_{(M, M)} P dx + Q dy =$$

разр. первого интеграла

$$= \int_{(MN)} P dx + Q dy = \int_{(MN)} P dx =$$

$$[MN]: \begin{cases} x \rightarrow x+h \\ y \equiv \text{const} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{параметризация} \\ & = \int_0^1 P(x+th, y) h dt = \\ & \begin{pmatrix} x = x+th \\ 0 \leq t \leq 1 \\ y = y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ср. значение

ср. значение

$$= \int_0^1 P(x+th, y) h dt = h P(x+\theta h, y) = \Delta u$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta u}{h} = P(x+\theta h, y) = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$$

$$\text{При } h \rightarrow 0 \quad P(x+\theta h, y) \rightarrow P(x, y)$$

$\Rightarrow$ предел имеет и ^{вспомогат.} ~~этот~~ раз

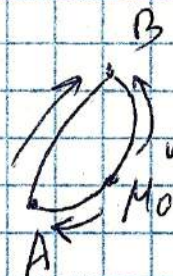
$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

$$\Rightarrow P dx + Q dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \stackrel{\text{def}}{=} du$$

Итого

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy =$$



$$u(A) = \int_{(M_0, A)} P dx + Q dy$$

$$u(B) = \int_{(M_0, B)} P dx + Q dy$$

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} P dx + Q dy &= \int_{\Gamma} P dx + Q dy + \int_{(M_0, B)} P dx + Q dy - \\ & - \int_{(M_0, A)} P dx + Q dy = \end{aligned}$$

$$= 0 + u(A) - u(B), \text{ т.е. } \emptyset.$$

$\Rightarrow$ $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$ — значение разности потенциалов в-ов A и B (или $u(B) - u(A)$)

$$\text{или же } \int_{(AB)} P dx + Q dy = \int_{(A, M_0)} P dx + Q dy + \int_{(M_0, B)} P dx + Q dy = u(B) - u(A) \quad (106)$$

3 $\Rightarrow$ 1 Если контур L замкнут
то его концы совпадают с началом.

$A=B$

 $\Rightarrow \oint_L P dx + Q dy = u(A) - u(A) = 0, \text{ что}$

Лемма 5 Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y) \in C^1[D]$. D — область.
Тогда каждое из усл. 1-3 эквив. усл. 4

4) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в D .

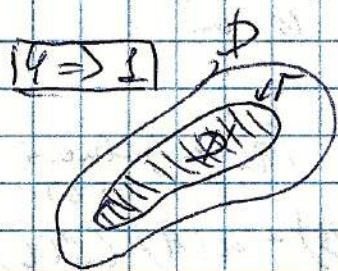
До-во $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$
 $\stackrel{?}{\Rightarrow} 4) \Leftarrow$

3 $\Rightarrow$ 4 В силу усл. 3 $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$

u — диф-л и конт. (т.к. P и Q — конт.)

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

{т.к. конт. $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ } , что.



Γ — кусочно-гладкая крив.
 для любых T_1 и T_2 пересекающихся, то тогда
 для D , ограниченной T .

применяем ф-лу Грина

$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{D'} \left(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{0} \right) dx dy$ по усл. (4)
 что